MATHEMATIQUES
Fonction exponentielle : entraînement 1 (corrigé)

Exercice 1

1. x^2+2x+1 est le développement de $(x+1)^2$.
On a donc $f(x)=(x+1)^2\mathrm{e}^{-x}$.

Or, $(x+1)^2 \geqslant 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et $\mathrm{e}^{-x}>0$ sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que $f(x)$ est le produit d'un nombre positif ou nul par un nombre strictement positif, donc $f(x)\geqslant 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ donc en particulier pour tout x de I.

Remarque
Si vous ne reconnaissez pas l'égalité remarquable (et je ne vous en veux pas...), il y a toujours la possibilité de calculer Δ. Il doit être négatif. Vérifiez !

2.a. La fonction f est dérivable sur I (comme produit de deux fonctions dérivables).
f est de la forme $u\times v$ avec $u(x)=x^2+2x+1$ et $v(x)=\mathrm{e}^{-x}$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \underbrace{(2x+2)}_{u'(x)}\times\underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{v(x)}+\underbrace{(x^2+2x+1)}_{u(x)}\times\underbrace{(-\mathrm{e}^{-x})}_{v'(x)}\\
&= \mathrm{e}^{-x}((2x+2)-(x^2+2x+1))\\
&= \mathrm{e}^{-x}(\cancel{2x}+2-x^2-\cancel{2x}-1)\\
&= \mathrm{e}^{-x}(-x^2+1)
\end{aligned}$$

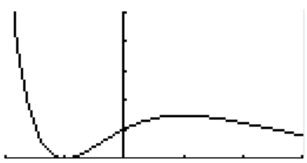
Explications
On a $(\mathrm{e}^u)'=u'\mathrm{e}^u$.
$x\longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ est de la forme e^u avec $u(x)=-x$.
On a $u'(x)=-1$.
Ainsi, sa dérivée est $x\longmapsto -1\mathrm{e}^{-x}$ soit $x\longmapsto -\mathrm{e}^{-x}$

b. $-x^2+1$ est un trinôme du second degré admettant deux racines : -1 et 1.
Donc $-x^2+1$ est du signe de $a=-1<0$ sauf entre ses racines (-1 et 1).

On en déduit le tableau de variations et la courbe représentative de f sur I :

Pensez-y !
Inutile de calculer Δ pour trouver les racines de ce trinôme.
L'équation $-x^2+1=0$ est équivalente à $x^2=1$. Cette équation a bien deux solutions -1 et 1.
En dernier recours, utilisez votre calculatrice pour trouver ces racines.

x	-2		-1		1		3
$-x^2+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	e^2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	$16\mathrm{e}^{-3}$



Calculatrice
Ayez le réflexe calculatrice afin de vérifier votre tableau de variations.
On obtient cette représentation avec $X_{Min}=-2$, $X_{Max}=3$, $X_{Scale}=1$ $Y_{Min}=0$, $Y_{Max}=5$ et $Y_{Scale}=1$.
Avec le solveur graphique Gsolv, puis MAX, MIN et Y-CAL (pour les images de -2 et 3) on obtient les valeurs remarquables (vous pouvez laisser des valeurs approchées éventuellement).

Exercice 2

1. **a.** La fonction f est de la forme $f = \dfrac{u}{v}$ et admet donc comme fonction dérivée $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

$u(x) = 4x$ et donc $u'(x) = 4$.
$v(x) = \mathrm{e}^x$ et donc $v'(x) = \mathrm{e}^x$.

On obtient donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{4\mathrm{e}^x - 4x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} \\ &= \frac{(4-4x)\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} \\ &= \frac{4(1-x)\,\cancel{e^x}}{e^x \times \cancel{e^x}} \\ &= \frac{4(-x+1)}{e^x} \end{aligned}$$

b. On étudie dans un premier temps le signe de f' sur $\mathbb{R}$, puis dans la foulée, on dresse le tableau de variations de f :
On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

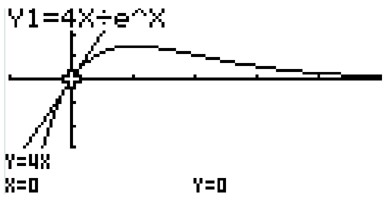
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-x+1$		$+$	0	$-$	
e^x		$+$		$+$	
4		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{4}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	

$f(1) = \dfrac{4 \times 1}{\mathrm{e}^1} = \dfrac{4}{\mathrm{e}}$

Calculatrice

On obtient la représentation avec $X_{Min} = -1$, $X_{Max} = 5$, $X_{Scale} = 1$ $Y_{Min} = -5$, $Y_{Max} = 3$ et $Y_{Scale} = 1$.

Avec Sketch F4, puis Tan3, en entrant la valeur 0, on peut faire apparaître la tangente au point d'abscisse 0 ainsi que son équation. Sympa, non ?



2. Ici $a = 0$, on a donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{T} : y &= f'(0)(x-0) + f(0) \\ &= \frac{4(-0+1)}{\mathrm{e}^0}x + \frac{4 \times 0}{\mathrm{e}^0} \\ &= \frac{4}{1}x + \frac{0}{1} \\ &= 4x \end{aligned}$$

Rappel

L'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Exercice 3

1. a. La production minimale est de 10 tonnes et la production maximale est de 250 tonnes, on en déduit que la fonction B est définie sur $I = [1\ ;\ 25]$.

> **Attention**
> • Relisez bien la consigne : q dans la fonction B est en dizaines de tonnes.
> • 8522 € arrondit à la centaine près donnent 8500 €.

b. Pour déterminer le bénéfice obtenu pour 50 tonnes d'aliments produits et vendus, on calcule $B(5)$.

$B(5) = 10 - \dfrac{\mathrm{e}^{0,2\times 5+1}}{5} \simeq 8,522$.

En arrondissant, on peut dire que le bénéfice obtenu pour 50 tonnes d'aliments produits et vendus est d'environ de 8 500 €.

2. a. La fonction B est de la forme $B = 10 - \dfrac{u}{v}$ et admet donc comme fonction dérivée $B' = -\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

$u(q) = \mathrm{e}^{0,2q+1}$ et donc $u'(q) = 0,2\mathrm{e}^{0,2q+1}$.
$v(q) = q$ et donc $v'(q) = 1$.

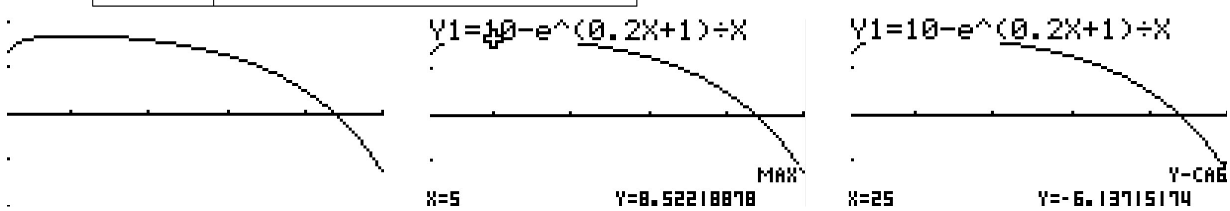
On obtient donc :

$$\begin{aligned}
B'(q) &= -\frac{u'(q)v(q) - u(q)v'(q)}{v(q)^2}\\
&= -\frac{0,2\mathrm{e}^{0,2q+1} \times q - \mathrm{e}^{0,2q+1} \times 1}{(q)^2}\\
&= -\frac{(\mathrm{e}^{0,2q+1}(0,2q-1)}{(q)^2}\\
&= \frac{(1-0,2q)\mathrm{e}^{0,2q+1}}{q^2}
\end{aligned}$$

b. On en déduit le tableau de signes de la fonction dérivée suivi du tableau de variations de la fonction B dans la foulée :

q	1		5		25
$1-0{,}2q$		$+$	0	$-$	
$\mathrm{e}^{0{,}2q+1}$		$+$		$+$	
q^2		$+$		$+$	
$B'(q)$		$+$	0	$-$	
$B(q)$		$\nearrow$	8,522	$\searrow$	

> **Signe**
> • $1-0,2q$ s'annule pour $q = 5$.... Résolvez l'équation $1-0,2q = 0$ si vous voulez....
> • $q \longmapsto 1-0,2q$ est une fonction affine (la droite descend car $-0,2 < 0$, on passe donc de $+$ à $-$).



On obtient cette représentation avec $X_{Min} = 1$, $X_{Max} = 25$, $X_{Scale} = 5$ $Y_{Min} = -10$, $Y_{Max} = 10$ et $Y_{Scale} = 5$.
Avec le solveur graphique Gsolv (touche SHIFT puis F5), on obtient des valeurs approchées des coordonnées du point le plus haut de la courbe (avec MAX touche F2) et des valeurs approchées des images de 1 et 25 (avec Y-CAL touche F1).

3. D'après ce tableau de variations, on en déduit que le bénéfice est maximal lorsque la société fabrique et vend 50 tonnes. Celui-ci est alors de 8522 €.

Exercice 4

PARTIE A : ÉTUDE DE LA FONCTION f

1. On calcule la hauteur des plants le jour où ils sont plantés avec $f(0)$.
$f(0) = \dfrac{120}{5e^{-0,08\times 0}+1} = \dfrac{120}{5+1} = 20$.
Les plants ont 20 cm le jour de leur plantation.

2. Pour tout réel t de $[0\ ;\ +\infty[$, $5e^{-0,08t}+1 > 1$ car $e^{-0,08t} > 0$.

Par conséquent, par passage à l'inverse, on obtient :

$$\frac{1}{5e^{-0,08t}+1} < \frac{1}{1}$$

et en multipliant par 120, $\dfrac{120}{5e^{-0,08t}+1} < 120$.

On en déduit que les plants de tomates ne dépasseront jamais 120 cm de hauteur.

Explications

- Sur le graphique la courbe se situe en dessous de la droite d'équation $y = 120$;
- Lorsque t prend des valeurs de plus en plus grandes, $f(t)$ prend des valeurs qui se rapprochent de 120. On parle de limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
On écrit $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 120$.
- Graphiquement, on voit que passer une certaine date, on ne constate plus la croissance du plant de tomate. La courbe de rapproche de la droite horizontale $y = 120$. On dit que la droite d'équation $y = 120$ est une asymptote à la courbe.

3. Calcul de la dérivée de f.
$f = 120 \times \dfrac{1}{v}$ où $v(t) = 5e^{-0,08t}+1$.
Par conséquent $f' = 120 \times \dfrac{-v'}{v^2}$ et $v'(t) = 5 \times \left(-0,08e^{-0,08t}\right) = -0,4e^{-0,08t}$.
Il en résulte $f'(t) = 120 \times \dfrac{-(-0,4e^{-0,08t})}{(5e^{-0,08t}+1)^2}$ soit en simplifiant $f'(t) = \dfrac{48e^{-0,08t}}{(5e^{-0,08t}+1)^2}$.

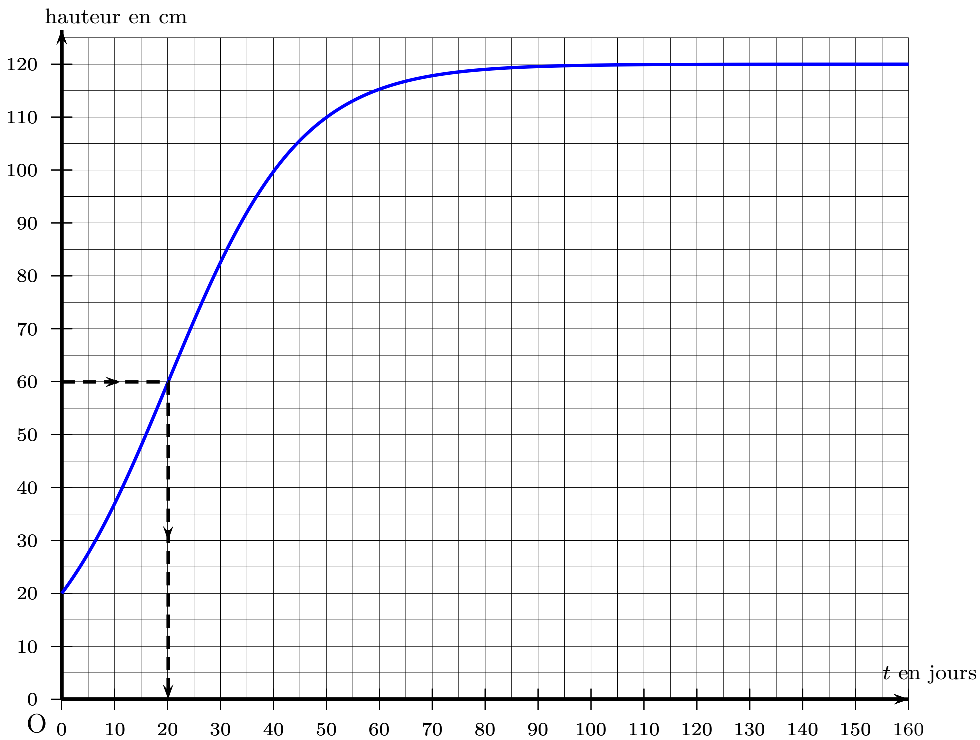
4. Pour tout t appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$, $f'(t)$ est strictement positif comme somme, produit et quotient de nombres strictement positifs. f' étant strictement positive, f est donc strictement croissante sur cet intervalle.
On en déduit le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$+$	
$f(x)$	20 $\nearrow$	

PARTIE B : EXPLOITATION

1. L'inéquation permettant de déterminer au bout de combien de jours le plant mesurera plus de 60 cm de haut est $f(t) > 60$.

2. Résolvons cette inéquation graphiquement :
L'abscisse du point d'intersection de la droite d'équation $y = 60$ avec la courbe est environ 20.

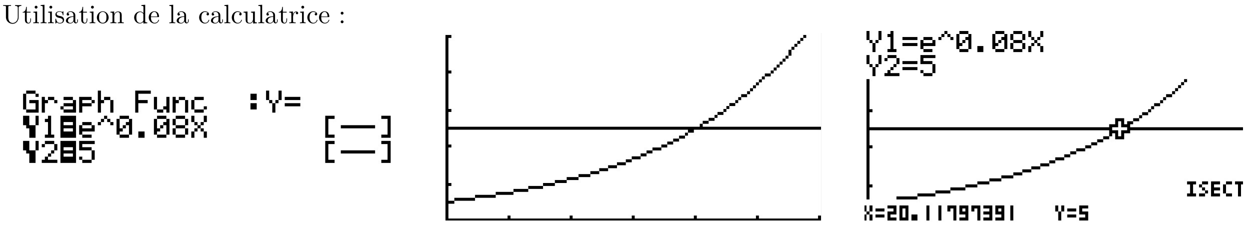


Graphiquement, c'est à partir de 20 jours que le plant aura atteint une hauteur de plus de 60 cm.

3. a. Inéquation $f(t) > 60$.

$$\begin{array}{rcll}
f(t) & > & 60 & \\
\dfrac{120}{5\mathrm{e}^{-0{,}08t}+1} & > & 60 & \\
\dfrac{2}{5\mathrm{e}^{-0{,}08t}+1} & > & 1 & \text{On divise par 60} \\
2 & > & 5\mathrm{e}^{-0{,}08t}+1 & \text{On multiplie par } 5\mathrm{e}^{-0{,}08t}+1>0 \\
1 & > & 5\mathrm{e}^{-0{,}08t} & \text{On retranche 1} \\
\dfrac{1}{5} & > & \mathrm{e}^{-0{,}08t} & \text{On divise par 5} \\
\dfrac{1}{5} & > & \dfrac{1}{\mathrm{e}^{0{,}08t}} & \mathrm{e}^{-x}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}} \\
5 & < & \mathrm{e}^{0{,}08t} & \text{Passage à l'inverse}
\end{array}$$

b. Utilisation de la calculatrice :



On obtient cette représentation avec $X_{Min} = 0$, $X_{Max} = 30$, $X_{Scale} = 5$ $Y_{Min} = 0$, $Y_{Max} = 10$ et $Y_{Scale} = 2$.

Avec le solveur graphique Gsolv (touche SHIFT puis F5), on obtient des valeurs approchées des coordonnées du point d'intersection entre les deux courbes avec ISECT touche F5.

La valeur de t cherchée est $t \simeq 20,12$

PARTIE C : ALGORITHME

1. L'entrée dans la boucle **Tant que** de cet algorithme dépend d'une condition. Elle se fait lorsque f est strictement inférieure à 30 et la sortie lorsque f est au moins égal à 30.

2. Les trois premières valeurs de la variable t sont 0, 1 et 2. Nous obtenons pour les valeurs correspondantes de la variable f, respectivement 20, 21,4 et 22,8 (*les résultats étant arrondis au dixième*) qui sont les images par la fonction f de 0,1 et 2. On les obtient à l'aide d'un tableau de valeurs obtenu à l'aide de la calculatrice :

X	Y1
0	20
1	21.369
2	22.81
3	24.325

3. La valeur de t affichée à la fin de l'algorithme est 21. Cette valeur représente concrètement le nombre de jours qu'il faut attendre pour que le plant dépasse 60 cm.