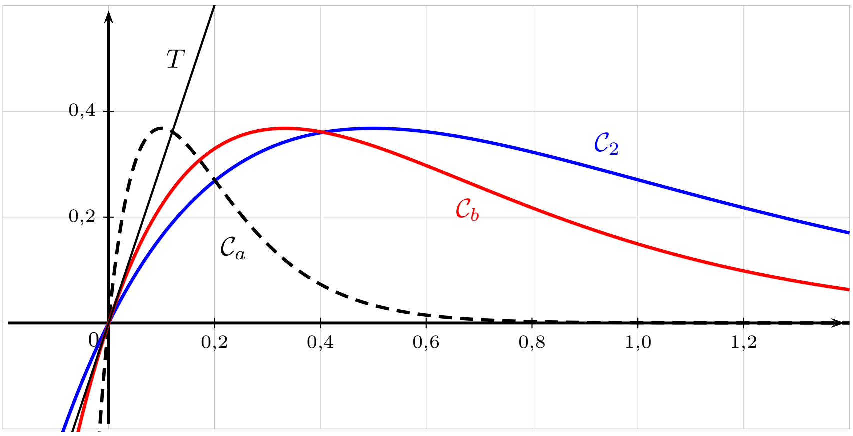
MATHEMATIQUES
Fonction exponentielle : entraînement 2

Exercice 1

Pour tout réel k strictement positif, on désigne par f_k la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f_k(x) = kx\mathrm{e}^{-kx}.$$

On note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.
On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_b$ où a et b sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à $\mathcal{C}_b$ au point O origine du repère. Celle-ci passe par le point de coordonnées $(0,2\ ;\ 0,6)$.



1. Montrer que pour tout réel k strictement positif, les courbes $\mathcal{C}_k$ passent par un même point dont on précisera les coordonnées.
2. Pour tout réel k strictement positif, montrer que f_k admet un maximum et donner une valeur approchée arrondie à 10^{-3} de ce maximum.
3. En observant le graphique, justifier que $a > 2$.
4. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_k$ au point O origine du repère.
5. Démontrer que $b = 3$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exercice 2

Le Code de la route interdit toute conduite d'un véhicule lorsque le taux d'alcoolémie est supérieur ou égal à 0,5 g/L.

Partie A : étude graphique

Le taux d'alcoolémie d'une personne pendant les 10 heures suivant la consommation d'une certaine quantité d'alcool est modélisé par la fonction f.

- x représente le temps (exprimé en heure) écoulé depuis la consommation d'alcool ;
- $f(x)$ représente le taux d'alcoolémie (exprimé en g/L) de cette personne.

On donne sa représentation graphique de la fonction f dans un repère :

1. a. Décrire les variations du taux d'alcoolémie de cette personne pendant les 10 heures suivant la consommation d'alcool.

b. À quel instant le taux d'alcoolémie de cette personne est-il maximal ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir au centième.

2. L'automobiliste a-t-il le droit de conduire au bout de trois heures ? Justifier.

Partie B : étude de la fonction f

f est la fonction définie sur $[0\,;\,10]$ par :

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer le taux d'alcoolémie au bout de 4 heures et 15 minutes. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée arrondie au centième.

2. Montrer que $f'(x) = (-2x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

3. a. Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ en le justifiant.

b. En utilisant le tableau de variations, donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0,5$ dans $[0\,;\,10]$. Faire apparaître ces solutions dans le tableau, puis donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée au centième de chacune de ces solutions.

c. Une fois l'alcool consommé, au bout de combien de temps le taux d'alcoolémie de l'automobiliste reprend-il une valeur conforme à la législation ? On donnera le résultat en heures et minutes.

Exercice 3

Un laboratoire teste l'efficacité d'un nouveau désodorisant d'intérieur bio, à diffusion lente, fabriqué avec 99,9 % de produits naturels. La fonction g modélise le taux d'efficacité du désodorisant (en pourcentage) en fonction du temps t exprimé en heures.
g est définie sur $[0\,;\,24]$ par

$$g(t) = 50t\mathrm{e}^{-0,5t+1}.$$

1. La courbe C_g , donnée ci-dessous est la représentation graphique de g dans un repère orthogonal. À l'aide de cette courbe, sur laquelle les traits de construction resteront apparents :

- **a.** Déterminer au bout de combien de temps le taux d'efficacité est maximal. Donner alors sa valeur.
- **b.** Le désodorisant est considéré comme efficace lorsque le taux d'efficacité est supérieur ou égal à 40 %. Il est commercialisable lorsqu'il est considéré comme efficace pendant 5 heures et demie ou plus.
  Vérifier si ces deux conditions sont réalisées et donc si le désodorisant est commercialisable.

2. **a.** Montrer que pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,24]$, $g'(t) = (50-25t)\mathrm{e}^{-0,5t+1}$.

- **b.** Étudier le signe de $g'(t)$, puis construire le tableau de variation de g sur $[0\,;\,24]$.

3. **a.** Calculer $g(0,5)$ puis $g(6)$. Les résultats seront arrondis à 10^{-1} près.

- **b.** Justifier alors, en utilisant le sens de variation de la fonction f, que les deux conditions données à la question **1. b.** sont bien réalisées.

Courbe C_g