MATHEMATIQUES
Fonction exponentielle : entraînement 2 (corrigé)

Exercice 1

1. Pour tout k strictement positif :

$$f_k(0) = k \times 0 \times \mathrm{e}^{-k\times 0} = 0$$

Par conséquent, pour tout réel k strictement positif, les courbes $\mathscr{C}_k$ passent toutes par le point de coordonnées $(0\ ;\ 0)$ c'est-à-dire l'origine du repère.

Comment le voir ?

Les représentations graphiques de quelques fonctions f_k sont là pour nous mettre sur la voie. Les 4 courbes représentées passent toutes par l'origine du repère.

2. f_k est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$.
f est de la forme $f = \times v$ avec $u(x) = kx$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-kx}$.

Sa dérivée est donc de la forme $f' = u'v + uv'$.
Comme $u'(x) = k$ et $v'(x) = -k\mathrm{e}^{-kx}$, on obtient :

Dérivée

La dérivée de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-kx}$ s'obtient grâce à la dérivée de $\mathrm{e}^u = u'\mathrm{e}^u$.

Factorisation

Les représentations graphiques de quelques fonctions f_k sont là pour nous mettre sur la voie. Les 4 courbes représentées passent toutes par l'origine du repère.

$$\begin{aligned} f_k'(x) &= k\mathrm{e}^{-kx} + kx \times (-k)\mathrm{e}^{-kx} \\ &= k\mathrm{e}^{-kx}(1-kx) \end{aligned}$$

Comme k est strictement positif, $k\mathrm{e}^{-kx} > 0$.
De plus $x \longmapsto 1 - kx$ est une fonction affine décroissante qui s'annule en $\frac{1}{k}$. Donc pour $x > \frac{1}{k}$, cette fonction est négative.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{k}$		$+\infty$
$k\mathrm{e}^{-kx}$		$+$		$+$	
$1-kx$		$+$	0	$-$	
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_k(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	

$$\begin{aligned} f_k\left(\frac{1}{k}\right) &= k \times \frac{1}{k}\mathrm{e}^{-k\times\frac{1}{k}} \\ &= \mathrm{e}^{-1} \\ &\simeq 0,368 \end{aligned}$$

Les fonctions f_k admettent un maximum en $x = \frac{1}{k}$. Ce maximum vaut $\frac{1}{\mathrm{e}}$ qui vaut approximativement 0,368.

3. Le maximum de f_2 est atteint en $\frac{1}{2}$ et le maximum de f_a est atteint en $\frac{1}{a}$. Sur le graphique, on voit que $\frac{1}{2}$ est plus grand que $\frac{1}{a}$. On en déduit que $a > 2$.

Remarque

$\frac{1}{a} < \frac{1}{2}$ et comme la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, les nombres et les images sont rangées dans l'ordre inverse, on a bien $a > 2$. Mais tout cela peut se faire assez intuitivement, si $\frac{1}{a} < \frac{1}{2}$ alors $a > 2$.

4. Equation de la tangente à $\mathscr{C}_k$ au point d'abscisse 0 :

Cette équation est de la forme : $y = f_k'(0)(x-0) + f_k(0)$.

$f_k'(0) = k\mathrm{e}^{-k\times 0}(1 - k \times 0) = k \times 1 \times 1 = k$ et $f_k(0) = 0$.

On en déduit $y = k(x-0) + 0$ soit $y = kx$.

L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_k$ au point d'abscisse 0 est donnée par : $y = x$.

5. Comme une équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = kx$, une équation de la tangente à $\mathscr{C}_b$ au point d'abscisse 0 est donc $y = bx$ et par suite le coefficient directeur de cette droite est b.
Cette droite passe par le point B de coordonnées $(0,2\ ;\ 0,6)$ d'après l'énoncé et par le point O, on en déduit que son coefficient directeur est donné par $\dfrac{y_B - y_O}{x_B - x_O} = \dfrac{0,6}{0,2} = 3$.

Par conséquent, on a bien $b = 3$.

Exercice 2

Partie A

1. **a.** Le taux d'alcoolémie va croître la première heure, puis décroître les 9 heures suivantes.
   b. Le taux d'alcoolémie de cette personne est maximal au bout d'une heure ; il vaut alors $f(1)$ soit environ $0,74$ g/L.
2. Au bout de 3 heures, le taux d'alcoolémie est 0,3 g/L et 0,3 < 0,5. On en déduit qu'au bout de 3 heures, l'automobiliste a le droit de conduire.

Partie B

1. Le taux d'alcoolémie au bout de 4 heures et 15 minutes est donnée par $f(4,25)$.
$f(4,25) = 2 \times 4,25\mathrm{e}^{-4,25} = 8,5\mathrm{e}^{-4,25}$ (valeur exacte).
$f(4,25) \simeq 0,12$.
Le taux d'alcoolémie au bout de 4 heures et 15 minutes est d'environ 0,12 g/L.

2. f est sous la forme d'un produit uv avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

On a $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -1 \times \mathrm{e}^{-x} = -\mathrm{e}^{-x}$.

Dérivée de e^u

N'oubliez pas que la dérivée de e^u est $u'\mathrm{e}^u$.
Ici $u(x) = -x$ et donc $u'(x) = -1$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \underbrace{2 \times \mathrm{e}^{-x}}_{u'(x)\times v(x)} + \underbrace{2x \times (-1)\mathrm{e}^{-x}}_{u(x)\times v'(x)} \\ &= -2x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x} \\ &= (-2x+2)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Factoriser

Toujours penser à factoriser... Pourquoi ? Parce que on doit étudier son signe et qu'on connaît la règle des signes des produits.

3. **a.** Tableau de variations de f :
Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $2 - 2x$ s'annule et change de signe pour $x = 1$.
$f(0) = 0$; $f(1) = 2\mathrm{e}^{-1} \approx 0,74$ et $f(10) = 20\mathrm{e}^{-10} \approx 1,5 \times 10^{-4}$

x	0		1		10
$-2x+2$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	$20\mathrm{e}^{-10}$

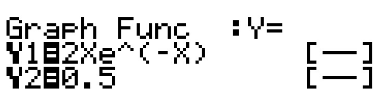
b. $f(0) = 0 < 0,5$, $f(1) \approx 0,74 > 0,5$ et $f(12) \approx 1,5 \times 10^{-4} < 0,5$

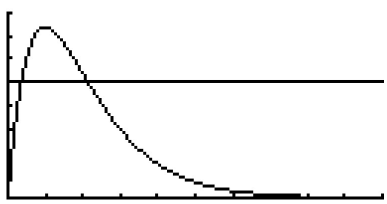
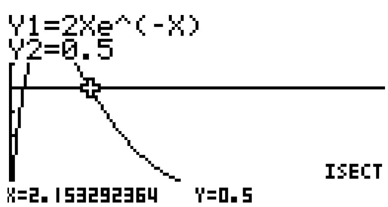
On complète le tableau de variations de la fonction f :

x	0		x_0		1		x_1		10
$-2x+2$				$+$	0	$-$			
e^{-x}				$+$				$+$	
$f'(x)$				$+$	0	$-$			
$f(x)$	$0 < 0{,}5$	$\nearrow$	$0{,}5$	$\nearrow$	$2\mathrm{e}^{-1} > 0{,}5$	$\searrow$	$0{,}5$	$\searrow$	$20\mathrm{e}^{-10} < 0{,}5$

On en déduit que l'équation $f(x) = 0,5$ admet deux solutions x_0 et x_1 sur l'intervalle $[0\,;10]$.

Utilisation de la calculatrice :



On obtient cette représentation avec $X_{Min} = 0$, $X_{Max} = 10$, $X_{Scale} = 1$ $Y_{Min} = 0$, $Y_{Max} = 0,8$ et $Y_{Scale} = 0,1$.

Avec le solveur graphique Gsolv (touche SHIFT puis F5), on obtient des valeurs approchées des coordonnées des points d'intersection entre les deux courbes avec ISECT touche F5. On utilise la flèche de direction REPLAY pour obtenir les coordonnées du deuxième point. .

On trouve pour valeurs approchées au centième des solutions de l'équation $f(x) = 0,5$ les nombres $0,36$ et $2,15$.

c. Le Code de la route interdit toute conduite d'un véhicule lorsque le taux d'alcoolémie est supérieur ou égal à 0,5 g/L.

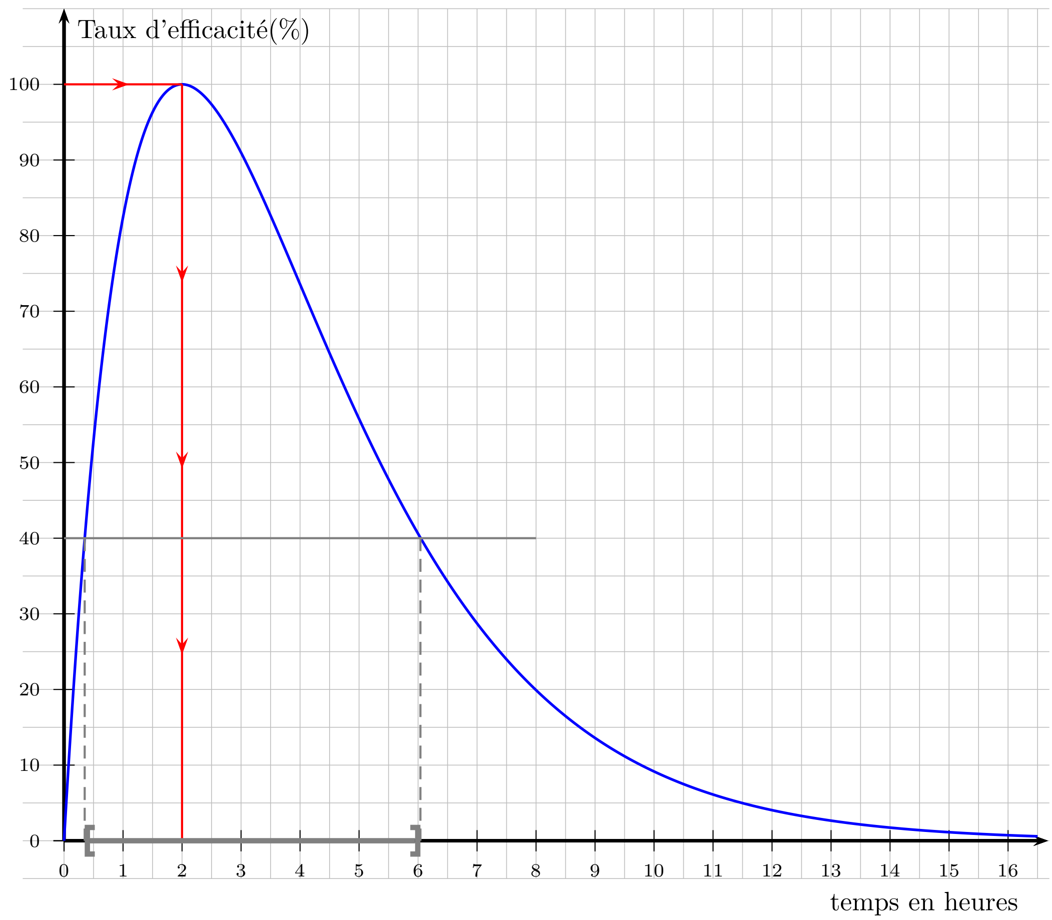
Une fois l'alcool consommé, on cherche au bout de combien de temps le taux d'alcoolémie de l'automobiliste reprend une valeur conforme à la législation ; il faut que $f(x)$ redevienne inférieur à $0,5$ donc que le temps soit supérieur à $2,15$ heures soit 2 h 9 min.

Exercice 3

1. a. D'après le graphique, le taux d'efficacité est maximal et vaut 100 % pour $t = 2$ donc au bout de 2 heures.

b. Le désodorisant est considéré comme efficace lorsque le taux d'efficacité est supérieur ou égal à 40 %. Il est commercialisable lorsqu'il est considéré comme efficace pendant 5 heures et demie ou plus.

D'après le graphique, l'efficacité est supérieure à 40 % sur l'intervalle $[0,4 ; 6]$ (environ), ce qui fait une durée de plus de 5 heures et demie ; le déodorant est donc commercialisable.



2. a. La fonction g est sous la forme d'un produit. On a $g = u \times v$ avec $u(t) = 50t$ et $v(t) = \mathrm{e}^{-0,5t+1}$.
On a $u'(t) = 50$ et $v'(t) = \underbrace{-0,5}_{\text{Dérivée de } t \longmapsto -0,5t+1} \mathrm{e}^{-0,5t+1}$.

Pour tout t appartenant à l'intervalle $[0 ; 24]$,

$$\begin{aligned} g'(t) &= 50 \times \mathrm{e}^{-0,5t+1} + 50t \times (-0,5)\mathrm{e}^{-0,5t+1} \\ &= (50 - 25t)\mathrm{e}^{-0,5t+1} \end{aligned}$$

b. Tableau de signe de $g'(t)$ et tableau de variations de g :
On a pour tout $t \in [0 ; 24]$, $\mathrm{e}^{-0,5t+1} > 0$ et $50 - 25t > 0 \iff -25t > -50 \iff t < 2$.

t	0		2		24
$50-25t$		$+$	0	$-$	
$\mathrm{e}^{-0,5t+1}$		$+$		$+$	
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	100	$\searrow$	$\simeq 0{,}02$

3. a. $g(0,5) = 50 \times 0,5 \times \mathrm{e}^{0,75} \approx 52,9$ et $g(6) = 50 \times 6 \times \mathrm{e}^{-2} \approx 40,6$.

b.
- D'après le tableau de variations de g :
  si $0,5 \leqslant t \leqslant 2$, alors $g(0,5) \leqslant g(t) \leqslant g(2)$.
  Cela veut dire que $52,9 \leqslant g(t) \leqslant 100$.
  Donc pour tout t de $[0,5\ ;\ 2]$, on a $g(t) > 40$.

- D'après le tableau de variations de g :
  si $2 \leqslant t \leqslant 6$, alors $g(2) \geqslant g(t) \geqslant g(6)$.
  Cela veut dire que $100 \geqslant g(t) \geqslant 40,02$.
  Donc pour tout t de $[2\ ;\ 6]$, on a $g(t) > 40$.

- On déduit que pour tout t de $[0,5\ ;\ 6]$, on a $g(t) > 40$.

- De plus, $6 - 0,5 = 5,5$.

On peut donc dire que les deux conditions données à la question **1. b.** sont bien réalisées.

Sens de variations

Il faut décomposer en deux l'intervalle $[0,5\ ;\ 6]$ car le sens de variation de g change sur cet intervalle.
Quand la fonction est croissante, les nombres et les images sont rangées dans le même ordre.
En revanche, lorsque la fonction est décroissante, les nombres et les images sont rangées dans l'ordre inverse.