MATHEMATIQUES
Fonction exponentielle : entraînement 3

Exercice 1

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g.

2. Donner le tableau de variations de g.

3. L'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\ ;\ +\infty[$ une unique solution. On la note α.

  a. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

  b. Démontrer que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la **partie 1.**

2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^x + 1}$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
La figure est donnée ci-dessous.
Pour tout réel x positif ou nul, on note :

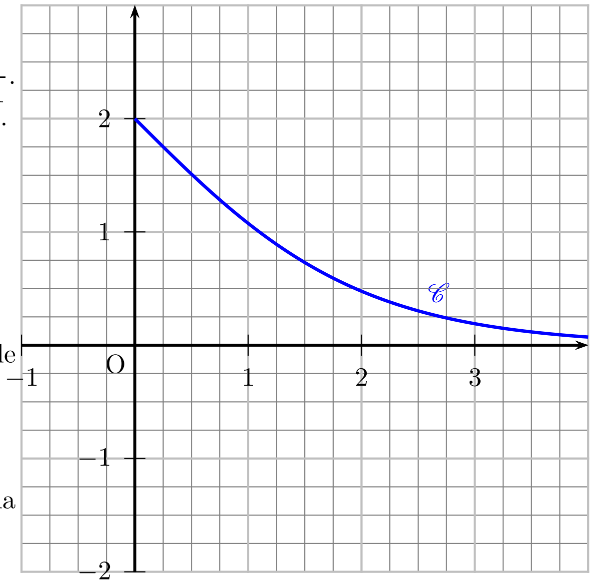
M le point de $\mathscr{C}$ de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$,

P le point de coordonnées $(x\ ;\ 0)$,

Q le point de coordonnées $(0\ ;\ f(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α.
On rappelle que le réel α a été défini dans la **partie 1.**

2. Le point M a pour abscisse α.
La tangente (T) en M à la courbe $\mathscr{C}$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?



. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Exercice 2

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de $1\,000$ ˚C. À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit.
On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint.

La température du four est exprimée en degré Celsius (˚ C).

La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70˚ C. Sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.

Partie A

Pour un nombre entier naturel n, on note T_n la température en degré Celsius du four au bout de n heures écoulées à partir de l'instant où il a été éteint. On a donc $T_0 = 1\,000$.
La température T_n est calculée par l'algorithme suivant :

```
T = 1 000
for i in range(n) :
        T = 0,82 * T + 3,6
```

1. Décrire la suite utilisée dans cet algorithme.

2. Déterminer la température du four, arrondie à l'unité, au bout de 4 heures de refroidissement.

3. En utilisant la calculatrice, déterminer au bout de combien d'heures le four peut être ouvert sans risque pour les céramiques.

Partie B

Dans cette partie, on note t le temps (en heure) écoulé depuis l'instant où le four a été éteint.
La température du four (en degré Celsius) à l'instant t est donnée par la fonction f définie, pour tout nombre réel t positif, par :

$$f(t) = a\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + 20,$$

où a est un nombre réel.

1. Montrer que la fonction f vérifie la relation suivante :

$$f'(t) + \frac{1}{5}f(t) = 4$$

2. Déterminer la valeur de a sachant qu'initialement, la température du four est de $1\,000$ ˚C.

3. **a.** Étudier les variations de f sur $[0~;~+\infty[$.
En déduire son tableau de variations.

b. Avec ce modèle, en utilisant la calculatrice, après combien de minutes le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?

4. Démontrer que la température à l'intérieur ne peut jamais être inférieure à 20 ˚ C.

5. Représenter graphiquement la fonction f dans le repère ci-dessous.