MATHEMATIQUES
Fonction exponentielle : entraînement 3 (corrigé)

Exercice 1
Partie 1

1. La fonction g somme de fonctions dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$ est dérivable et sur $[0\ ;\ +\infty[$:
La dérivée de la fonction $x \longmapsto x\mathrm{e}^x$, s'obtient en utilisant la formule du produit $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.

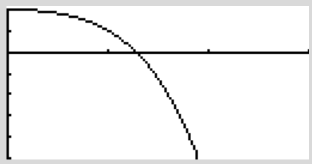
$$\begin{aligned} g'(x) &= \mathrm{e}^x - (\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x) + 0 \\ &= -x\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{e}^x > 0$ et $x \geqslant 0$, on a $g'(x) \leqslant 0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.
g est donc décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

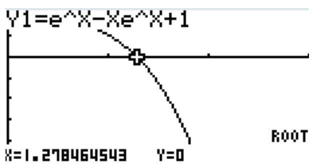
2. Tableau de variations de g.

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	
$g(x)$	2	0	$-\infty$

Réflexe calculatrice



3. a. La calculatrice donne :



Donc, $1,27 < \alpha < 1,28$.

b. Démonstration d'une égalité.

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= 0 \\ \mathrm{e}^\alpha - \alpha\mathrm{e}^\alpha + 1 &= 0 \\ \mathrm{e}^\alpha(1-\alpha) &= -1 \\ \mathrm{e}^\alpha &= \frac{1}{\alpha - 1} \end{aligned}$$

Conseil
La question précédente est importante ici : on traduit simplement que $g(\alpha) = 0$. De toutes façons, que pouvait-on écrire d'autre avec α ?

4. Tableau de signes de $g(x)$.
Grâce au tableau de variations, on en déduit :

x	0		α		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie 2

1. La fonction A quotient de fonctions dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$ (le dénominateur ne s'annulant pas) est dérivable et sur cet intervalle :

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{4\left(\mathrm{e}^x+1\right)-4x\times\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2} \\ &= \frac{4\left(\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x+1\right)}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2} \\ &= \frac{4}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}\times g(x) \end{aligned}$$

Dérivée d'un quotient

On utilise la dérivée d'un quotient :
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u(x)=4x$ et $v(x)=\mathrm{e}^x+1$.
L'idée étant de faire apparaître $g(x)$ dans cette dérivée, d'où la factorisation par 4.

Comme $\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2>0$ quel que soit x, le signe de $A'(x)$ est celui de $g(x)$.
D'après la précédente question on a donc :

x	0		α		$+\infty$
Signe de $A'(x)$		$+$	0	$-$	

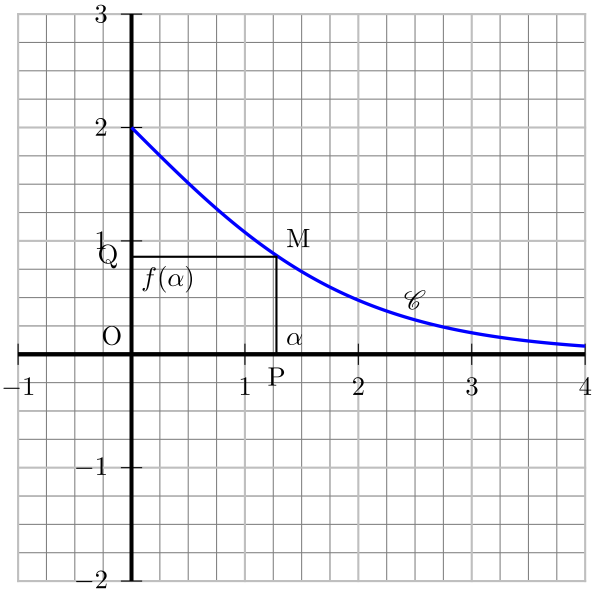
2. Tableau de variations de la fonction A sur $[0\ ;\ +\infty[$.

On a donc :

x	0		α		$+\infty$
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
$A(x)$	0	$\nearrow$	$A(\alpha)$	$\searrow$	

Partie 3

1. Aire du rectangle $MNPQ$.



On sait que $x\geqslant 0$, donc l'aire du rectangle $\mathrm{O}PMQ$ est égale à $x\times f(x)=\dfrac{4x}{\mathrm{e}^x+1}=A(x)$.
Or on a vu que cette fonction présente un maximum pour $x=\alpha$.
Ainsi, l'aire du rectangle $\mathrm{O}PMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α.

2. • Le coefficient directeur de la droite (PQ) est égal à :

$$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{f(\alpha) - 0}{0 - \alpha} = -\frac{f(\alpha)}{\alpha} = -\frac{\frac{4}{\mathrm{e}^{\alpha}+1}}{\alpha} = -\frac{4}{\alpha\left(\mathrm{e}^{\alpha}+1\right)}$$

Or on a vu que $\mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$, donc le coefficient directeur est égal à :

$$-\frac{4}{\alpha\left(\mathrm{e}^{\alpha}+1\right)} = -\frac{4}{\alpha\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)} = -\frac{4}{\alpha\left(\frac{1}{\alpha-1}+\frac{\alpha-1}{\alpha-1}\right)} = -\frac{4}{\alpha\left(\frac{1+\alpha-1}{\alpha-1}\right)} = -\frac{4(\alpha-1)}{\alpha(1+\alpha-1)} = -\frac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}.$$

• La tangente en $M(\alpha\ ;\ f(\alpha))$ a pour coefficient directeur $f'(\alpha)$.

Or $f'(x) = -\dfrac{4\mathrm{e}^{x}}{\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)^2}$, donc

$$f'(\alpha) = -\frac{4\mathrm{e}^{\alpha}}{\left(\mathrm{e}^{\alpha}+1\right)^2} = -\frac{\frac{4}{\alpha-1}}{\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)^2} = -\frac{4(\alpha-1)}{(1+\alpha-1)^2} = -\frac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}.$$

Les coefficients directeurs sont égaux : les droites sont parallèles.

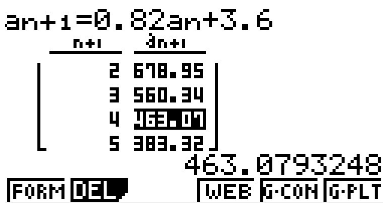
Exercice 2

Partie A :

1. La suite (T_n) utilisée dans cet algorithme est définie par : $\begin{cases} T_0 = 1000 \\ T_{n+1} = 0,82T_n + 3,6 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

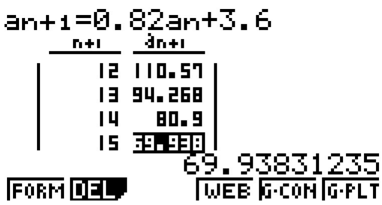
2. On cherche T_4.

A l'aide de la calculatrice on trouve :



Ainsi : $T_4 \approx 463$ °C

3. On cherche le plus petit entier naturel n tel que $T_n \leqslant 70$; La calculatrice donne : $T_{14} \approx 80,9 > 70$ et $T_{15} \approx 69,9 < 70$



Il faut attendre au minimum 15 heures avant de pouvoir ouvrir le four sans dommage.

Partie B :

1. La fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$:

$$f'(t) = a \times \left(-\frac{1}{5}\right) \times \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} = -\frac{a}{5}\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}.$$

Dérivée de $-\dfrac{t}{5}$

Pour dériver $t \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}$, on utilise la formule $u'\mathrm{e}^{u}$ avec $u(t) = -\dfrac{t}{5}$.

Or, $u(t) = -\dfrac{t}{5} = -\dfrac{1}{5}t$ et donc $u'(t) = -\dfrac{1}{5}$.

Ainsi, $f'(t)+\dfrac{1}{5}f(t)=-\dfrac{a}{5}\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}+\dfrac{1}{5}\left(a\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}+20\right)=-\dfrac{a}{5}\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}+\dfrac{a}{5}\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}+4=4.$

On en déduit que la fonction f vérifie bien la relation $f'(t)+\dfrac{1}{5}f(t)=4$.

2. La température du four est de 1 000 ˚C, donc $f(0)=1000$. On en déduit que $a\mathrm{e}^{-\frac{0}{5}}+20=1000$ soit $a=980$.
Ainsi pour tout réel t strictement positif :

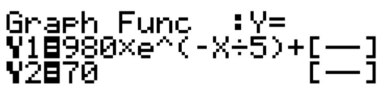
$$f(t)=980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}+20$$

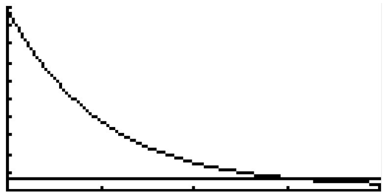
3. a. D'après la question **1.**, $f'(t)=-\dfrac{a}{5}\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}\underbrace{=}_{a=980}-196\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}$.

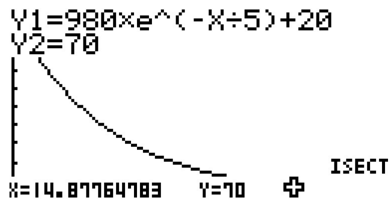
Comme $-196\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}<0$ pour tout réel $t>0$, on en déduit le tableau de variations :

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	0 ↘	

b. A l'aide de la calculatrice, on obtient :







On obtient cette représentation avec $X_{Min}=0$, $X_{Max}=25$, $X_{Scale}=5$ $Y_{Min}=0$, $Y_{Max}=1000$ et $Y_{Scale}=100$.
Avec le solveur graphique Gsolv (touche SHIFT puis F5), on obtient des valeurs approchées des coordonnées du point d'intersection entre les deux courbes avec ISCT touche F5.

Avec ce modèle, le four peut être ouvert au bout d'environ 14,878 heures soit en minutes au moins 893 min.

4. La température ne peut pas descendre en dessous de 20 ˚C, car pour tout réel $t>0$, $980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}>0$ et par suite $980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}+20>20$ soit $f(t)>20$.

5. Représentation graphique de la fonction f :