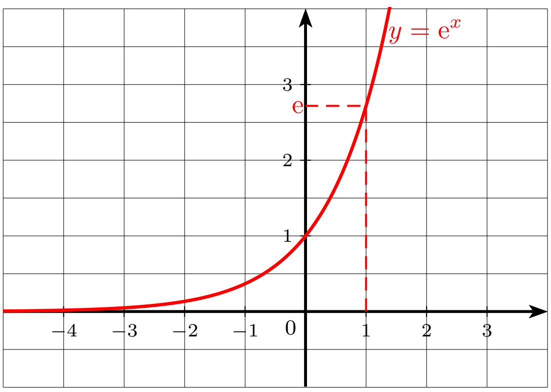
MATHEMATIQUES
Fonction exponentielle : entraînement savoir-faire (corrigé)

Quelques rappels concernant la fonction exponentielle :



x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
e^x	0 ↗	1 ↗	e ↗	$+\infty$

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$.

Exercice 1

A connaître

Pour tous réels x et y, et pour tout entier relatif m

$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$, $\quad \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$, $\quad \mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$, $\quad (\mathrm{e}^x)^m = \mathrm{e}^{mx}$

$\mathrm{A} = (\mathrm{e}^x)^3 - \mathrm{e}^{2x} \times \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{3\times x} - \mathrm{e}^{2x+x} = \mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{3x} = 0.$

$\mathrm{B} = \mathrm{e}^{-x+3}\left(\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right) = \mathrm{e}^{-x+3} \times \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-x+3} \times \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{x+3} - \mathrm{e}^{-2x+3}.$

$\mathrm{C} = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{x+2}\right)^2}{\mathrm{e}^{2x-1}} = \mathrm{e}^{2(x+2)-(2x-1)} = \mathrm{e}^{2x+4-2x+1} = \mathrm{e}^5.$

$$\begin{aligned}
\mathrm{D} &= \left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)^2 - \left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)^2 \\
&= \left(\underbrace{\mathrm{e}^{2x}}_{a^2} + \underbrace{2}_{2ab} + \underbrace{\mathrm{e}^{-2x}}_{b^2}\right) - \left(\underbrace{\mathrm{e}^{2x}}_{a^2} - \underbrace{2}_{2ab} + \underbrace{\mathrm{e}^{-2x}}_{b^2}\right) \\
&= 4
\end{aligned}$$

Egalités remarquables

On utilise les égalités remarquables :
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
avec $a = \mathrm{e}^x$ et $b = \mathrm{e}^{-x}$.
N'oubliez pas que $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} = 2\mathrm{e}^{x-x} = 2\mathrm{e}^0 = 2$.

Exercice 2

1.

$$\begin{aligned} e^{-2x} &= 1 \\ e^{-2x} &= e^0 \\ -2x &= 0 \\ x &= \frac{0}{-2} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Méthode

On écrit l'équation sous la forme $e^X = e^Y$, puis on utilise l'équivalence $e^X = e^Y \iff X = Y$

L'équation a une unique solution : 0.

2.

$$\begin{aligned} e^{x^2} &= e^{16} \\ x^2 &= 16 \\ x &= \sqrt{16} \text{ ou } x = -\sqrt{16} \\ x &= 4 \text{ ou } x = -4 \end{aligned}$$

Méthode

L'équation $X^2 = A$ a deux solutions lorsque A est strictement positif : $\sqrt{A}$ et $-\sqrt{A}$.

L'équation a deux solutions : -4 et 4.

3.

$$\begin{aligned} e^{x^2} &= e \\ e^{x^2} &= e^1 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \sqrt{1} \text{ ou } x = -\sqrt{1} \\ x &= 1 \text{ ou } x = -1 \end{aligned}$$

Rappel

$e = e^1$.

L'équation a deux solutions : -1 et 1.

4.

$$\begin{aligned} e^{x^2} &> e^2 \\ x^2 &> 2 \\ x^2 - 2 &> 0 \end{aligned}$$

Le trinôme $x^2 - 2$ est du signe de $a = 1$ partout sauf entre ses racines : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.
D'où le tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
signe de $x^2 - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

5. -1 est un nombre négatif. On en déduit que cette équation n'a pas de solution.

Conseil

Ne vous laissez pas surprendre par « le $-x$ ». Pour tout réel X, e^X est un nombre strictement positif.

6.

$$\begin{aligned} e^{-2x} &\geqslant 1 \\ e^{-2x} &\geqslant e^0 \\ -2x &\geqslant 0 \\ x &\leqslant \frac{0}{-2} \\ x &\leqslant 0 \end{aligned}$$

L'inéquation a pour solution : $]-\infty\ ;\ 0]$.

Méthode

• On écrit l'inéquation sous la forme $e^x \geqslant e^y$, puis on utilise l'équivalence $e^x \geqslant e^y \iff x \geqslant y$.
• Attention, lorsque l'on divise par un nombre strictement négatif (ici -2), on change le sens de l'inégalité.

Exercice 3

1. Equation $e^{2x-3} = e^{-x+7}$.

$$\begin{aligned} e^{2x-3} &= e^{-x+7} \\ 2x-3 &= -x+7 \\ 3x &= 10 \\ x &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

On reconnaît

On reconnaît une équation du type $e^X = e^Y$ que l'on sait résoudre.

Donc $\mathscr{S} = \left\{\dfrac{10}{3}\right\}$.

2. Equation $e^{x^2} \times e^{-2x+1} - 1 = 0$.

$$\begin{aligned} e^{x^2} \times e^{-2x+1} - 1 &= 0 \\ e^{x^2-2x+1} &= 1 \\ e^{x^2-2x+1} &= e^0 \\ x^2-2x+1 &= 0 \\ (x-1)^2 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

On s'y ramène

On se ramène à une équation du type $e^X = e^Y$ que l'on sait résoudre.

Donc $\mathscr{S} = \{1\}$.

Autrement

Ici, c'est le changement de variables qui va permettre de résoudre l'équation.

3. Equation $3e^{2x} + e^x - 4 = 0$
En posant $X = e^x$, $3e^{2x} + e^x - 4 = 0 \iff 3X^2 + X - 4 = 0$.

$\Delta = 1^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 49 > 0$ donc deux solutions $X_1 = \dfrac{-1-7}{2\times 3} = -\dfrac{4}{3}$ et $X_2 = \dfrac{-1+7}{2 \times 3} = 1$.
On cherche la valeur de x telle que $e^x = X_1$ et celle de x telle que $e^x = X_2$:

- $e^x = -\dfrac{4}{3} < 0$: Cette équation n'admet pas de solution car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.
- $e^x = 1 \iff x = 0$.

Donc $\mathscr{S} = \{0\}$.

4. Inéquation $\mathrm{e}^{-3x} > \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x+6}}$.

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{e}^{-3x} & > & \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x+6}} \\
\mathrm{e}^{-3x} & > & \mathrm{e}^{-(x+6)} \\
-3x & > & -x-6 \\
-2x & > & -6 \\
x & < & 3
\end{array}$$

On s'y ramène

On se ramène à une inéquation du type $\mathrm{e}^X > \mathrm{e}^Y$ qu'on sait résoudre.

Donc $\mathscr{S} =]-\infty\ ;\ 3[$.

5. Inéquation $(\mathrm{e}^x)^3 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-2x+1}}{\mathrm{e}^4}$.

$$\begin{array}{rcl}
(\mathrm{e}^x)^3 & \leqslant & \dfrac{\mathrm{e}^{-2x+1}}{\mathrm{e}^4} \\
\mathrm{e}^{3x} & \leqslant & \mathrm{e}^{-2x+1-4} \\
3x & \leqslant & -2x-3 \\
x & \leqslant & -\dfrac{3}{5}
\end{array}$$

La même

On se ramène à une inéquation du type $\mathrm{e}^X \leqslant \mathrm{e}^Y$ qu'on sait résoudre.

Donc $\mathscr{S} = \left]-\infty\ ;\ \dfrac{3}{5}\right]$.

6. Inéquation $(\mathrm{e}^{x+1}+1)(\mathrm{e}^{x-2}-\mathrm{e}) \geqslant 0$.

A reconnaître

C'est un produit dans le membre de gauche et il y a 0 dans le membre de droite. On peut faire un tableau de signes pour résoudre cette inéquation.

- $\mathrm{e}^{x-2}-\mathrm{e} \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^{x-2} \geqslant \mathrm{e}^1 \iff x-2 \geqslant 1 \iff x \geqslant 3$.
- $\mathrm{e}^{x+1}+1 > 0$.

On en déduit le tableau de signe :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de $\mathrm{e}^{x+1}+1$		$+$		$+$	
Signe de $\mathrm{e}^{x-2}-\mathrm{e}$		$-$		$+$	
Signe de $(\mathrm{e}^{x+1}+1)(\mathrm{e}^{x-2}-\mathrm{e})$		$-$	0	$+$	

Remarque

$(\mathrm{e}^{x+1}+1)(\mathrm{e}^{x-2}-\mathrm{e})$ est du signe de $\mathrm{e}^{x-2}-\mathrm{e} \geqslant 0$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x+1}+1 > 0$.

Exercice 4

L'essentiel

- Pour $k > 0$, la fonction $f_k\ :\ t \longmapsto \mathrm{e}^{kt}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t, $f_k'(t) = k \times \mathrm{e}^{kt}$.

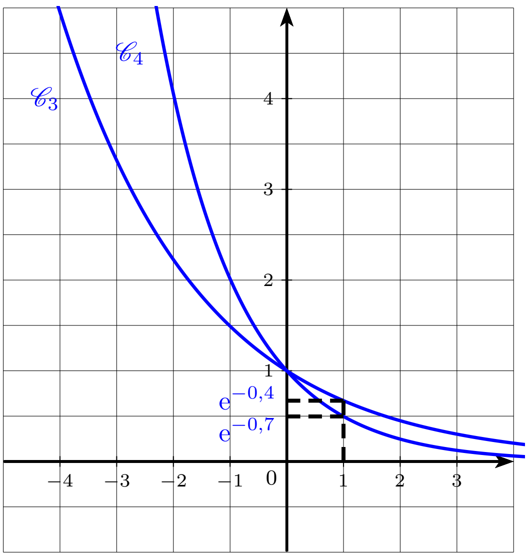
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(t)$		$+$	
$f_k(t)$	$\nearrow$	1	$\nearrow$

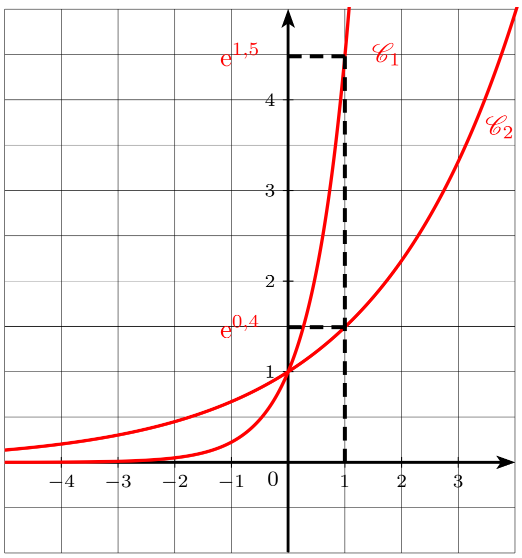
- Pour $k > 0$, la fonction $f_k\ :\ t \longmapsto \mathrm{e}^{-kt}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t, $f_k'(t) = -k \times \mathrm{e}^{-kt}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
$f_k(t)$	$\searrow$	1	$\searrow$

1. Les courbes bleues représentent des fonctions f_k strictement décroissantes, et correspondent donc à des fonction $f_k\ :\ t \longmapsto \mathrm{e}^{-kt}$ avec $k > 0$.

Les courbes rouges représentent des fonctions f_k strictement croissantes, et correspondent donc à des fonction $f_k\ :\ t \longmapsto \mathrm{e}^{kt}$ avec $k > 0$.





On a $f(1) = \mathrm{e}^{-0,4}$ et $\ell(1) = \mathrm{e}^{-0,7}$.
Or, $\mathrm{e}^{-0,7} < \mathrm{e}^{-0,4}$.
On en déduit que la fonction ℓ est représentée par la courbe $\mathscr{C}_4$ et par suite la fonction f est représentée par la courbe $\mathscr{C}_3$.

L'astuce

C'est grâce à la comparaison de l'image de 1 par les fonctions f et ℓ qu'on pourra se positionner.
N'oubliez pas que la fonction exponentielle étant strictement croissante, les nombres et les images par cette fonction sont rangés dans le même ordre. Ainsi, $\mathrm{e}^{-0,7} < \mathrm{e}^{-0,4}$ puisque $-0,7 < -0,4$.

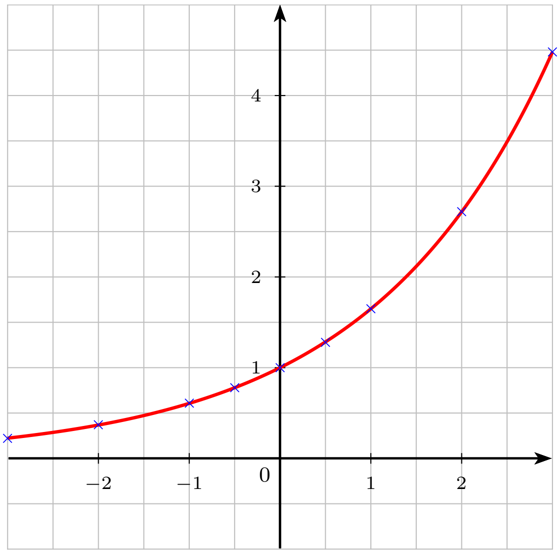
De la même façon, on a : $g(1) = \mathrm{e}^{0,4}$ et $h(1) = \mathrm{e}^{1,5}$.
Or, $\mathrm{e}^{1,5} > \mathrm{e}^{0,4}$.
On en déduit que la fonction g est représentée par la courbe $\mathscr{C}_2$ et par suite la fonction h est représentée par la courbe $\mathscr{C}_1$.

2. • La fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{0,06x}$ est strictement croissante. Sa courbe représentative passe par le point de coordonnées $(0 ; 1)$ et $(1 ; \mathrm{e}^{0,06})$.

• La fonction g définie par $g(x) = \mathrm{e}^{-3x}$ est strictement décroissante. Sa courbe représentative passe par le point de coordonnées $(0 ; 1)$ et $(1 ; \mathrm{e}^{-3})$.

3. f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \quad : \longmapsto \mathrm{e}^{kx}$ avec $k = 0,5$.
Sa dérivée est donnée par $f'(x) = 0,5\mathrm{e}^{0,5x}$ qui est strictement positive sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Pour représenter f, on complète le tableau de valeurs ci-dessous en utilisant la calculatrice et le menu TABLE.

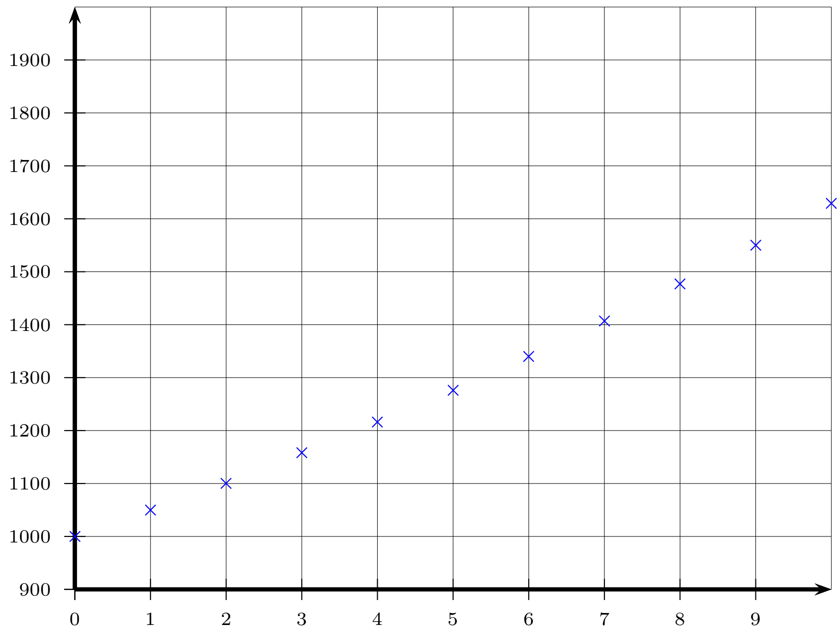
x	-3	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2	3
$f(x)$	0,22	0,37	0,61	0,78	1	1,28	1,65	2,72	4,48



Exercice 5

1. Augmenter une quantité de 5 % revient à la multiplier par 1,05.
Ainsi, en notant u_n le nombre d'habitants dans cette ville en $2016 + n$, on a :
$u_0 = 1000$ et $u_{n+1} = 1,05u_n$.
En utilisant une calculatrice, on obtient le tableau de valeurs suivant (les valeurs sont arrondies à l'unité) :

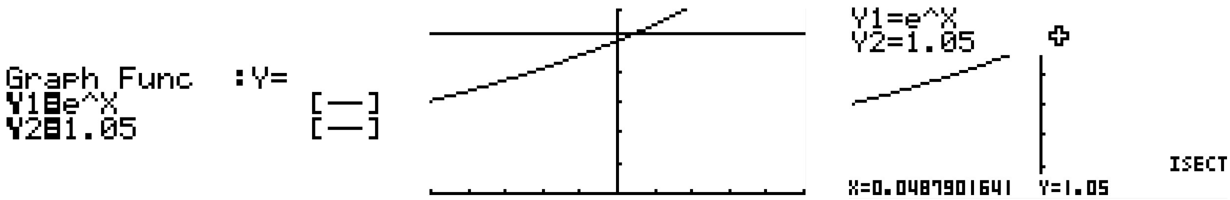
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	1000	1050	1102	1158	1216	1276	1340	1407	1477	1551	1629



2. **a.** On a $u_0 = 1000$, donc $f(0) = 1000$ soit $a \times \mathrm{e}^{k\times 0} = 1000$, d'où $a = 1000$.
La fonction f est donc définie par $f(t) = 1000\mathrm{e}^{kt}$.

b. On a $u_1 = 1050$, donc $f(1) = 1050$, soit $1000 \times \mathrm{e}^{k\times 1} = 1050$, d'où $\mathrm{e}^k = 1,05$.
Le nombre k est donc bien solution de l'équation $\mathrm{e}^x = 1,05$.

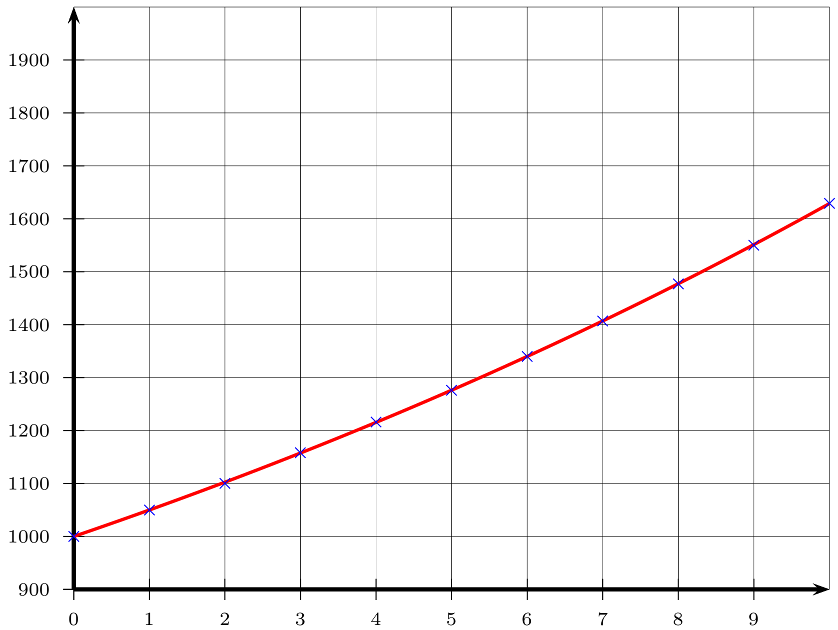
c. On cherche à l'aide de la calculatrice la solution de l'équation $\mathrm{e}^x = 1,05$.
Pour cela, on représente la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ et on trace la droite d'équation $y = 1,05$.
En utilisant le solveur graphique on trouve une valeur approchée de la solution.



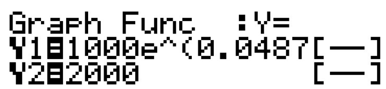
On obtient cette représentation avec $X_{Min} = -0,5$, $X_{Max} = 0,5$, $X_{Scale} = 0,1$ $Y_{Min} = 0$, $Y_{Max} = 1,2$ et $Y_{Scale} = 0,2$.
Avec le solveur graphique Gsolv (touche SHIFT puis F5), on obtient des valeurs approchées des coordonnées du point d'intersection entre les deux courbes avec ISCT touche F5.

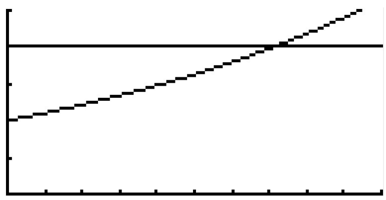
Calculatrice
Pour trouver la bonne fenêtre d'affichage (du moins celle qui permet de bien visualiser la situation) il faut parfois s'y reprendre à plusieurs fois. Ne vous découragez pas !

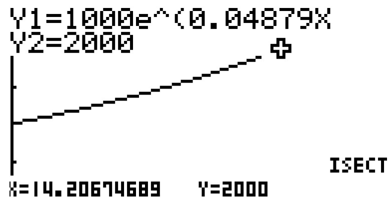
On trouve $k \simeq 0,04879$. La fonction f est donc définie par $f(t) = 1000\mathrm{e}^{0,04879t}$.
Ci-dessous, on a tracé la courbe de la fonction f. Celle-ci coïncide bien avec les points du nuage.



3. On cherche la valeur de t à partir de laquelle $f(t) > 2000$.
On est donc amené à résoudre l'inéquation $1000\mathrm{e}^{0,04879t} > 2000$.
En utilisant la calculatrice en représentant la fonction f et la droite d'équation $y = 2000$.







On obtient cette représentation avec $X_{Min} = 0$, $X_{Max} = 20$, $X_{Scale} = 2$ $Y_{Min} = 0$, $Y_{Max} = 2500$ et $Y_{Scale} = 500$.
Avec le solveur graphique Gsolv (touche SHIFT puis F5), on obtient des valeurs approchées des coordonnées du point d'intersection entre les deux courbes avec ISCT touche F5.

Calculatrice
Même remarque que précédemment !

On trouve donc comme valeur approchée $t > 14,21$. C'est donc dans 14 ans et 2 mois $(0,21 \times 12 = 2,52)$ que la population va doubler, soit à partir de février 2030.