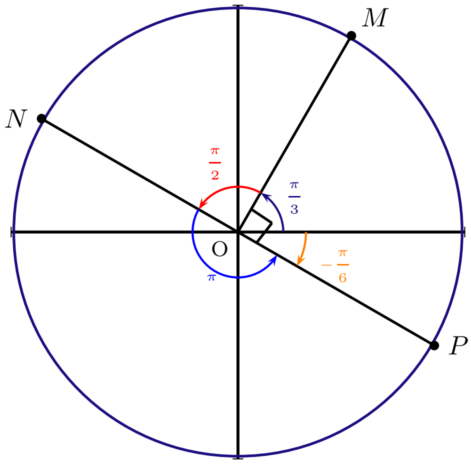
MATHEMATIQUES
Fonctions trigonométriques : entraînement (corrigé)

Exercice 1



Le point M est associé à $\frac{\pi}{3}$.

- Comme l'angle $\widehat{MON}$ est un angle droit (donc de mesure $\frac{\pi}{2}$), le point N est associé au nombre :

$$\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{6}+\frac{3\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$$

Les coordonnées du point N sont donc données par :
$x_N=\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $y_N=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$.
Ainsi, les coordonnées du point N sont $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

Coordonnées
Si le point N est le point du cercle associé au nombre x, alors son abscisse est $\cos x$ et son ordonnée $\sin x$.

- Comme l'angle $\widehat{NOP}$ est plat (donc de mesure π), le point P est associé au nombre

$$\frac{5\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6}+\frac{6\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$$

Les coordonnées du point P sont donc données par :
$x_P=\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $y_P=\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$.
Ainsi, les coordonnées du point P sont $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$.

Deux choses
- Comme l'angle $\widehat{MOP}$ est droit, le point P est aussi associé au nombre $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{6}-\frac{3\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$.
- $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

Exercice 2

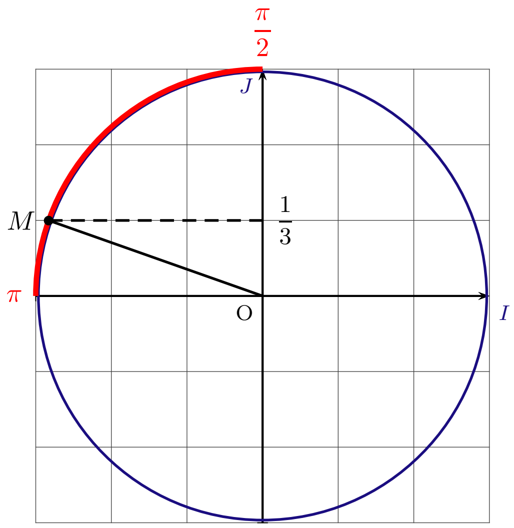
1. pour tous les réels x,

$$\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1\\
\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 x &= 1\\
\frac{1}{9} + \cos^2 x &= 1\\
\cos^2 x &= 1 - \frac{1}{9}\\
\cos^2 x &= \frac{8}{9}
\end{aligned}$$

Notation

$\cos^2 x = (\cos x)^2$.

2. a. Voir la figure.



b. Sur $I = \left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$, $\cos x \leqslant 0$.

c. L'équation $(\cos x)^2 = \frac{8}{9}$ est équivalente à $\cos x = \sqrt{\frac{8}{9}}$ ou $\cos x = -\sqrt{\frac{8}{9}}$.

Comme $\cos x \leqslant 0$, on en déduit $\cos x = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{\sqrt{8}}{3}$.

Cohérence

$-\frac{\sqrt{8}}{3} \simeq -0,94$ ce qui est cohérent avec la figure.

Exercice 3

1. Calcul de E.

$$\begin{aligned}
E &= \underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{=\frac{1}{2}} \times \underbrace{\sin\frac{\pi}{6}}_{=\frac{1}{2}} - \underbrace{\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)}_{=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}_{=\frac{(\sqrt{2})^2}{2^2}=\frac{2}{4}} \qquad \text{Attention la multiplication est prioritaire.}\\
&= \frac{1}{4} - \frac{2}{4}\\
&= -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

2. Par enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique, le point C est l'image de π.

Le pentagone régulier $ABCDE$ est inscrit dans le cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1.
La longueur d'un arc de cercle entre deux sommets consécutifs du pentagone $ABCDE$ est égale à : $\dfrac{2\pi}{5}$.

On en déduit que :

- le point B est l'image du réel $\pi - \dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{3\pi}{5}$.
- le point A est l'image du réel $\pi - 2 \times \dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\pi}{5}$.
- le point E est l'image du réel $\pi - 3 \times \dfrac{2\pi}{5} = -\dfrac{\pi}{5}$.
- le point D est l'image du réel $\pi - 4 \times \dfrac{2\pi}{5} = -\dfrac{3\pi}{5}$.

Polygone régulier

Les angles au centre d'un polygone régulier à n côtés ont tous pour mesure $\dfrac{2\pi}{n}$.

A voir

Bien entendu, on commence par le point C qui a une position bien connu sur le cercle trigonométrique. Ensuite on en déduit les autres réels en retranchant des $\dfrac{2\pi}{5}$ et pas ajoutant des $\dfrac{2\pi}{5}$ car sinon on ne serait dans l'intervalle demandé : $]-\pi\ ;\ \pi]$. Donc attention.

Exercice 4

1. On calcule les images de 0, $\dfrac{2\pi}{3}$ et π par la fonction f :

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{3\sin(0)}{2+\cos(0)} \\ &= 0 \quad \text{car } \sin(0) = 0. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(\pi) &= \frac{3\sin(\pi)}{2+\cos(\pi)} \\ &= 0 \quad \text{car } \sin(\pi) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \frac{3 \times \overbrace{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}}{2 + \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}_{-\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\underbrace{2 - \frac{1}{2}}_{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

x	0	$\dfrac{2\pi}{3}$	π
$f(x)$	0 $\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$ 0

2. $f(-x) = \dfrac{3\sin(-x)}{2+\cos(-x)} = \dfrac{-3\sin x}{2+\cos x} = -\dfrac{3\sin x}{2+\cos x} = -f(x)$ donc f est impaire.

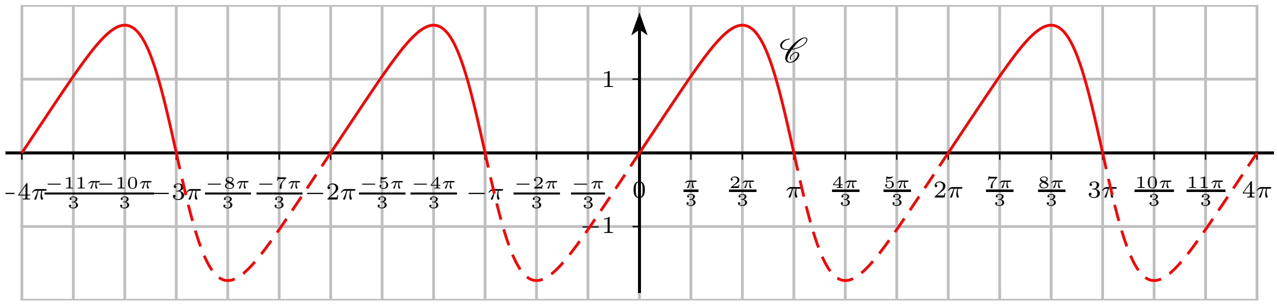
On peut donc limiter l'étude de f à $[0\ ;\ \pi]$. On peut en déduire que la fonction f est décroissante sur $[-\pi\ ;\dfrac{-2\pi}{3}]$ et sur $[\dfrac{2\pi}{3}\ ;\pi]$ et croissante sur $[-\dfrac{2\pi}{3}\ ;\dfrac{2\pi}{3}]$.

On a donc le tableau de variations :

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	0

3. $f(x+2\pi) = \dfrac{3\sin(x+2\pi)}{2+\cos(x+2\pi)} = \dfrac{3\sin x}{2+\cos x} = f(x)$ donc f est 2π-périodique.

4. On trace $\mathscr{C}$ sur $[0\ ;\ \pi]$ puis sur $[-\pi\ ;\ 0]$ par symétrie centrale puisque f est impaire.
Enfin, comme f est 2π-périodique, on répète le motif tous les 2π par translation.



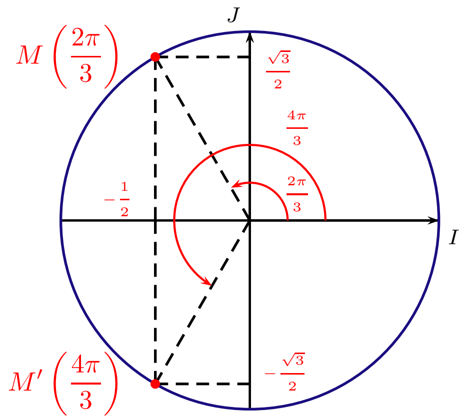
Exercice 5

Les nombres x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $\cos(x) = -\dfrac{1}{2}$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 7]$.

Graphiquement

Les solutions sont environ : 2,15 et 4,2

En utilisant le cercle trigonométrique, on a :



Les valeurs exactes de x_1 et x_2 sont $\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{4\pi}{3}$.

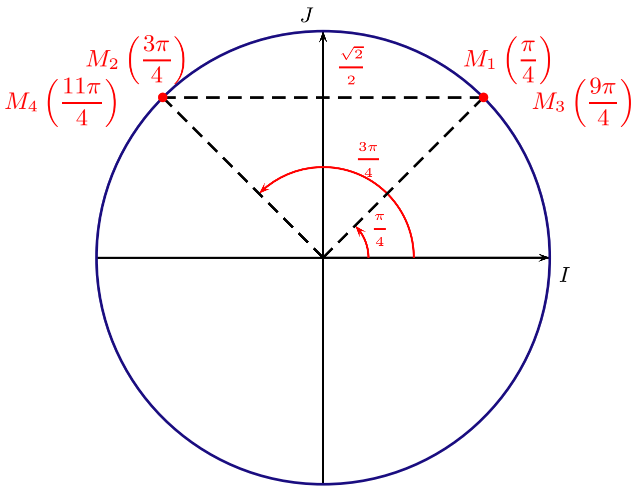
Cohérence

$\dfrac{2\pi}{3} \simeq 2,09$ et $\dfrac{4\pi}{3} \simeq 4,19$

Exercice 6

1. Les abscisses des points d'intersection sont les solutions de l'équation $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Graphiquement cette équation a quatre solutions : x_1, x_2, x_3 et x_4.

On utilise le cercle trigonométrique :



Sur $[0\ ;\ 2\pi]$, il y a deux points images des antécédents de $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ par la fonction sinus : $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$.
En ajoutant 2π à ces valeurs on obtient $\dfrac{9\pi}{4}$ et $\dfrac{11\pi}{4}$ qui sont les abscisses des points M_3 et M_4.

Les abscisses des points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{9\pi}{4}$ et $\dfrac{11\pi}{4}$.

2. Résolution des inéquations :

a. $\sin(x) < 0$ $\qquad \mathscr{S} =]\pi\ ;\ 2\pi[$.

b. $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \sin(x) < 1$ $\qquad \mathscr{S} = \left[\dfrac{\pi}{4}\ ;\ \dfrac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{9\pi}{4}\ ;\ \dfrac{11\pi}{4}\right]$.

c. $\sin(x) < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad \mathscr{S} = \left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right[\cup \left]\dfrac{3\pi}{4}\ ;\ \dfrac{9\pi}{4}\right[\cup \left]\dfrac{11\pi}{4}\ ;\ 3\pi\right]$.

Attention aux crochets !

Les solutions de cette inéquation sont les abscisses des points de la courbe qui se situent strictement en-dessous de la droite d'équation $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Par exemple le point d'abscisse 0 de la courbe se situe bien strictement en dessous de la droite ce qui signifie que 0 est bien solution de l'inéquation (crochet fermé donc).

Exercice 7

1. a. Voir la figure.

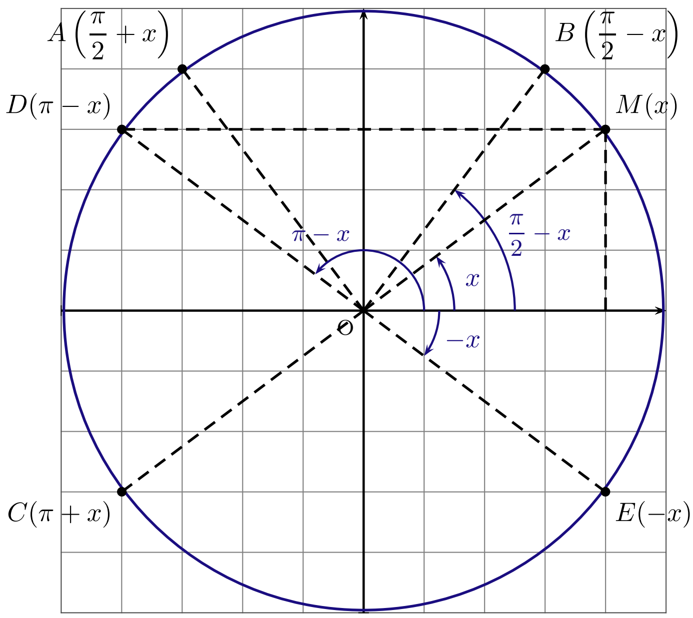
b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) \iff \cos^2(x) = 1 - \frac{9}{25}$$
$$\iff \cos^2(x) = \frac{16}{25}$$

Donc $\cos(x) = \dfrac{4}{5}$ ou $\cos(x) = -\dfrac{4}{5}$.

D'où $\cos(x) = -\dfrac{4}{5}$ car pour tout $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$, $\cos(x) \leqslant 0$.

2. **a.** Voir la figure.



Explications

Les points A et B sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées ainsi que les points D et M.
L'angle $\widehat{MOC}$ est un angle plat.

b. Simplification de l' écriture.

$$\begin{aligned}\mathrm{A}(x) &= \cos(-x)+\sin(-x)+\cos(\pi+x)+\sin(\pi-x)\\ &= \cos(x)-\sin(x)-\cos(x)+\sin(x)\\ &= 0\end{aligned}$$

Explications

On a les relations suivantes (la fonction cosinus étant paire et la fonction sinus impaire) :
$\cos(-x)=\cos(x)$.
$\sin(-x)=-\sin(x)$.
Et en plus,
$\cos(\pi+x)=-\cos(x)$ et $\sin(\pi-x)=\sin(x)$.

Exercice 8

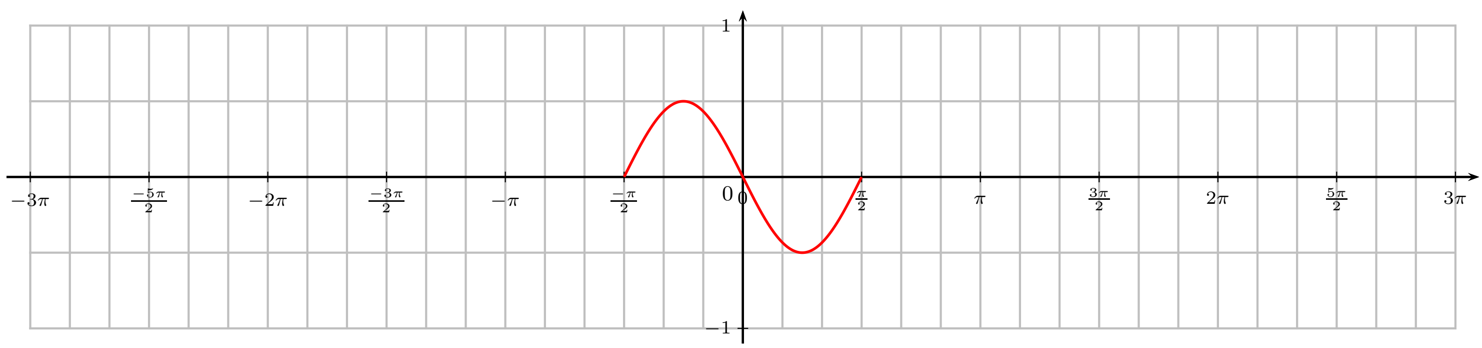
1. Calcul de $f(-x)$:

$$\begin{aligned}f(-x) &= -\frac{1}{2}\sin(2\times(-x))\\ &= -\frac{1}{2}\sin(-2x)\\ &= \frac{1}{2}\sin(2x)\\ &= -f(x)\end{aligned}$$

x ou $2x$, c'est pareil ?

Pour tout réel X, on a $\sin(-X)=-\sin(X)$ car la fonction sinus est impaire.
En posant $X=2x$, on obtient $\sin(-2x)=-\sin(2x)$.

On en déduit que la fonction f est impaire et donc que sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.
On en déduit donc la courbe sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$:



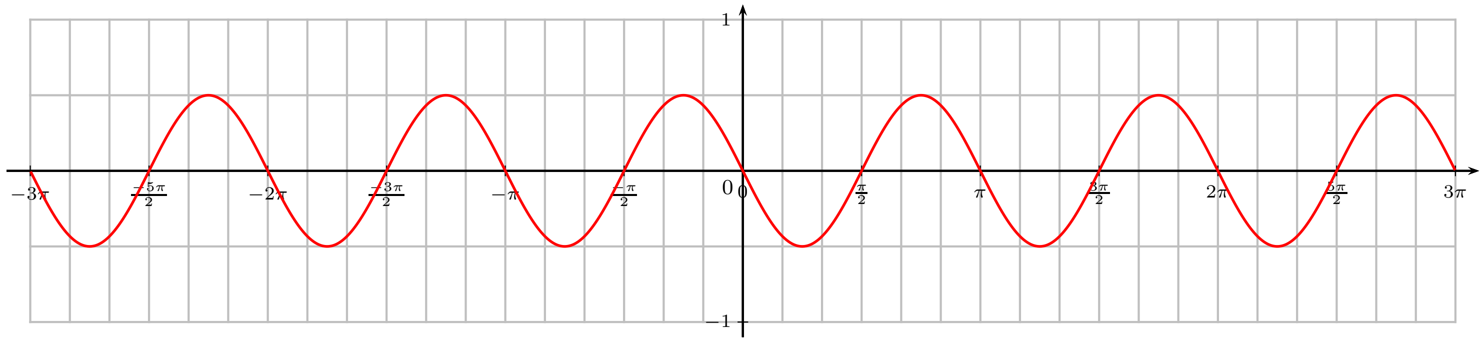
2. Calcul de $f(x+\pi)$:

$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= -\frac{1}{2}\sin(2\times(x+\pi)) \\ &= -\frac{1}{2}\sin(2x+2\pi) \\ &= -\frac{1}{2}\sin(2x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

x ou $2x$, c'est pareil ?

Pour tout réel X, on a $\sin(X+2\pi)=\sin(X)$ car la fonction sinus est périodique de période 2π.
En posant $X=2x$, on obtient $\sin(2x+2\pi)=\sin(2x)$.

On en déduit que la fonction f est périodique de période π. Comme on a déjà la courbe sur un intervalle d'amplitude π (puisqu'on l'a sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$), on n'a plus qu'à compléter par translation :



Exercice 9

1. Résolution de l'équation.

$$\begin{aligned} \cos(x)\left(\cos(x)+1\right) &= 0 \quad \text{On reconnaît une équation produit nul.} \\ \cos(x)=0 \quad &\text{ou} \quad \cos(x)=-1 \end{aligned}$$

- Sur $[0\ ;\ 2\pi]$, l'équation $\cos(x)=0$ a pour solutions $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$
- Sur $[0\ ;\ 2\pi]$, l'équation $\cos(x)=-1$ a pour solutions π.

Les solutions sur $[0\ ;\ 2\pi]$ sont donc : $\left\{\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right\}$

Aidez-vous du cercle trigo

N'hésitez pas à faire un cercle trigonométrique pour visualiser les solutions.... il vaut mieux le faire plutôt que d'écrire n'importe quoi !

On en déduit graphiquement que la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en trois points sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi[$.

Remarque

La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en trois points sur chaque intervalle d'amplitude 2π.

2. a. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(-x)=\cos^2(-x)+\cos(-x)=\cos^2(x)+\cos(x)=f(x)$. La fonction est donc paire.

b. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x+2\pi)=\cos(x+2\pi)^2+\cos(x+2\pi)=\cos(x)^2+\cos(x)=f(x)$. La fonction est donc 2π-périodique.

c. Comme la fonction f est 2π-périodique, on peut l'étudier sur un intervalle d'amplitude 2π (on complétera par translation) : par exemple $[-\pi\ ;\ \pi]$.

De plus f est paire, on peut donc restreindre cet intervalle d'étude à $[0\ ;\ \pi]$ (on complétera par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées).

3. a. $f(0) = \cos(0)(\cos(0) + 1) = 1 \times 2 = 2\,;$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 1\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = -\frac{1}{4}\,;$$

$f(\pi) = \cos(\pi)(\cos(\pi) + 1) = -1 \times 0 = 0\,;$

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f(x)$	2 ↘	$-\frac{1}{4}$	↗ 0

b.