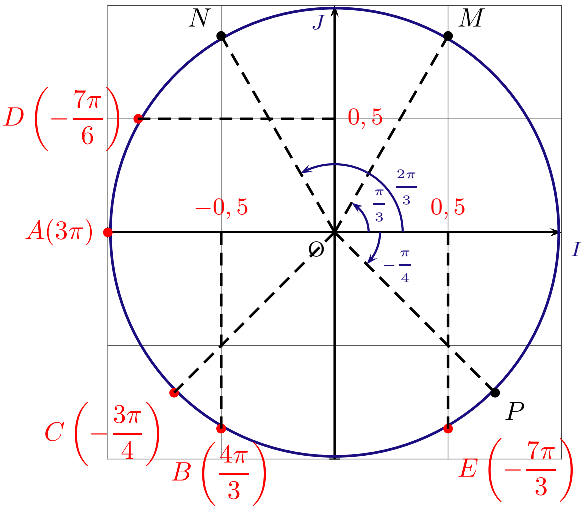
MATHEMATIQUES
Fonctions trigonométriques : entraînement savoir-faire (corrigé)

Exercice 1

$M\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $N\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $P\left(-\frac{\pi}{4}\right)$



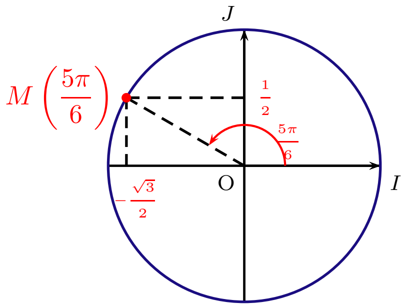
Exercice 2

x	$\cos(x)$	$\sin(x)$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1
π	-1	0

Exercice 3

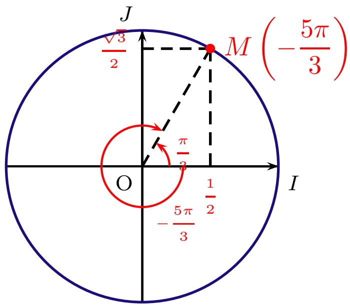
Comment faire ?

On se ramène au cosinus ou sinus d'une valeur remarquable (voir le tableau de l'exercice précédent). On peut pour cela ajouter ou retrancher un certain nombre de fois 2π au réel donné et bien sûr s'aider d'un petit schéma.



- $\frac{5\pi}{6}$

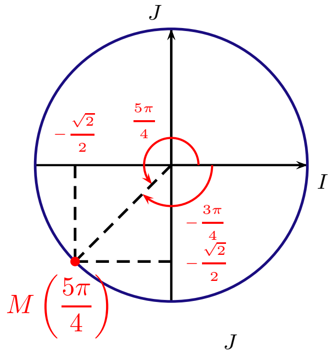
$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.



- $-\frac{5\pi}{3}$

$-\frac{5\pi}{3} = \frac{-6\pi + \pi}{3} = -2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

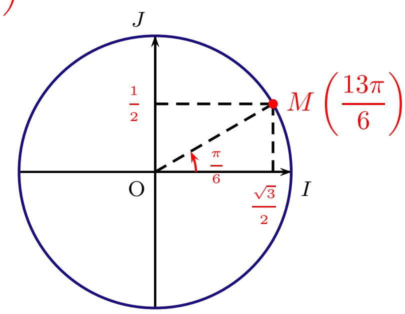
$\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



- $\frac{5\pi}{4}$

$\frac{5\pi}{4} = \frac{8\pi - 3\pi}{4} = 2\pi - \frac{3\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

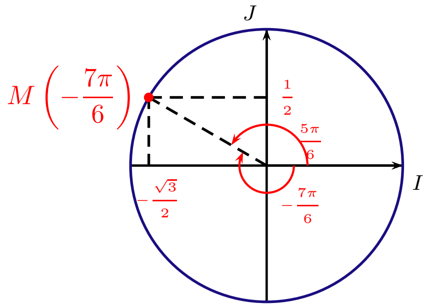
$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



- $\frac{13\pi}{6}$

$\frac{13\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

$\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.



- $-\frac{7\pi}{6}$

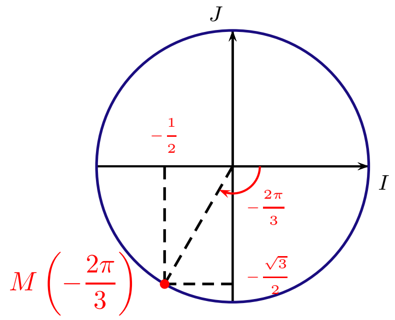
$-\frac{7\pi}{6} = \frac{-12\pi + 5\pi}{6} = -2\pi + \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$.

$\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

- $-\dfrac{8\pi}{3}$

$-\dfrac{8\pi}{3} = \dfrac{-6\pi - 2\pi}{3} = -2\pi - \dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

$\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Exercice 4

1. Tableau de variations de la fonction f sur $[0\ ;\ \pi]$.

x	0	π
$f(x)$	1 ↘	-1

A connaître

Tableaux de variations et courbes des fonctions sinus et cosinus sont à connaître !

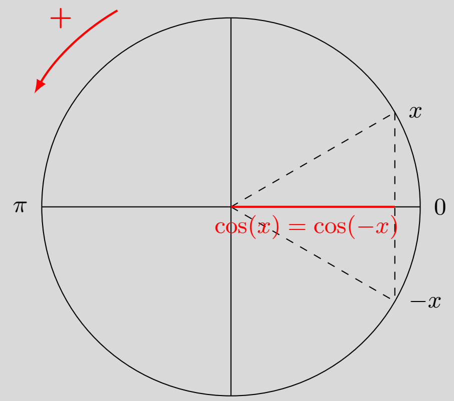
2. Pour tout réel x, $f(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x)$.
On en déduit que la fonction f est paire.

Pour tout réel x, on a :

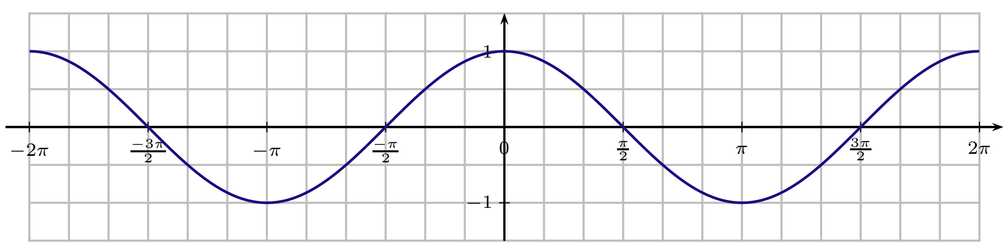
$$f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) = \cos(x).$$

On en déduit que la fonction f est périodique de période 2π.

Avec le cercle

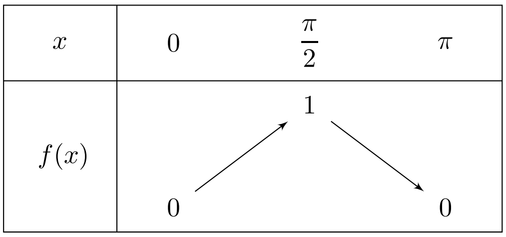


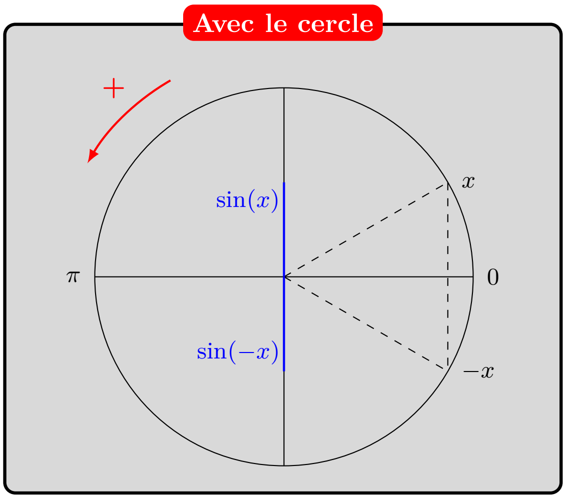
3. Courbe représentative de la fonction cosinus :



Exercice 5

1. Tableau de variations de la fonction g sur $[0\ ;\ \pi]$.





2. Pour tout réel x,

$g(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = g(x)$.

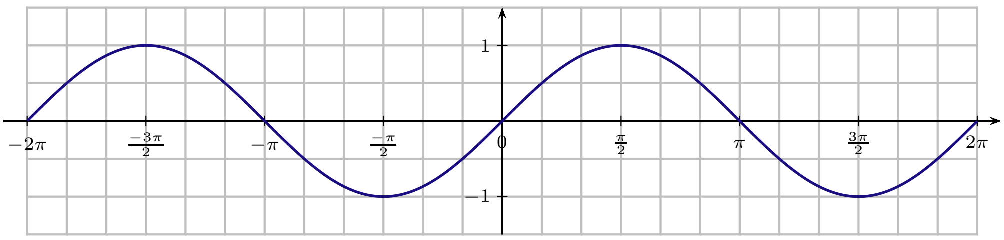
On en déduit que la fonction g est impaire.

Pour tout réel x, on a :

$g(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.

On en déduit que la fonction g est périodique de période 2π.

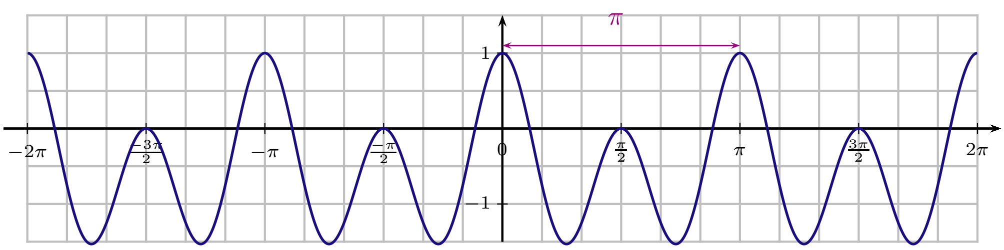
3. Courbe représentative de la fonction sinus :



Exercice 6

1. La période de la fonction f est π. Graphiquement, $f(x + \pi) = f(x)$.

La courbe est symétrique par rapport à l'axe des oronnées, on en déduit que f est une fonction paire.



2. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \cos(4\times(-x)) - (\sin(-x))^2 \\ &= \cos(-4x) - (-\sin(x))^2 \\ &= \cos(4x) - (\sin(x))^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Rappels
- $\sin^2(x) = (\sin(x))^2$.
- $\cos(-x) = \cos(x)$.
- $\sin(-x) = -\sin(x)$.

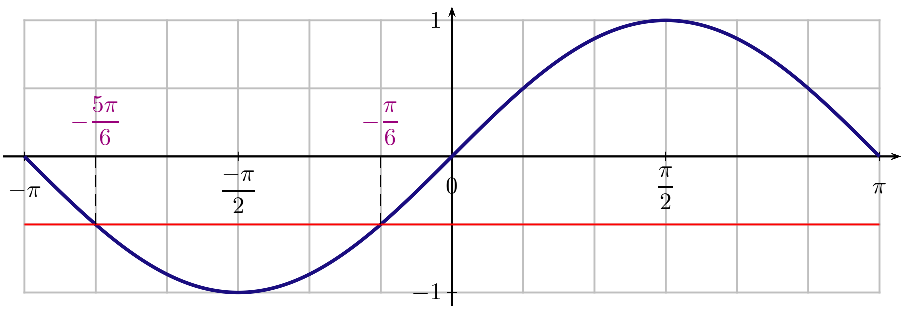
Ainsi f est une fonction paire.

Exercice 7

1. Pour déterminer les antécédents de $-\dfrac{1}{2}$ par la fonction sinus, on trace la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}$ et on lit les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite.

Il y en a deux. Cela signifie que $-\dfrac{1}{2}$ a deux antécédents par la fonction sinus sur $[-\pi\ ;\ \pi]$: $-\dfrac{\pi}{6}$ et $-\dfrac{5\pi}{6}$.

Et sur $\mathbb{R}$?
$-\dfrac{1}{2}$ a une infinité d'antécédents sur $\mathbb{R}$.
Il y en a de deux types : $-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ et $-\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.



2. Les points situés sur le cercle trigonométrique sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Ainsi tout nombre de l'intervalle $]-1\ ;\ 1[$ admet deux antécédents dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ par la fonction sinus. Les images de ces nombres sur le cercle sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.