MATHEMATIQUES
Géométrie repérée : entraînement (corrigé)

Exercice 1

Explications

Dans cet exercice, la figure est essentielle pour se repérer entre les vecteurs directeurs et les vecteurs normaux.

a. • Δ_1 est la droite qui passe par A et qui est parallèle à la droite d, d ayant pour vecteur normal $\vec{n}(-3\ ;\ 2)$. Ce vecteur est donc également un vecteur normal de Δ_1.

Une équation cartésienne de Δ_1 est $ax+by+c=0$ avec $a=-3$ et $b=2$.

A savoir

Toute droite de vecteur normal $\vec{n}(a\ ;\ b)$ admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$.

On en déduit $\Delta_1 : -3x+2y+c=0$.

On trouve c en utilisant les coordonnées du point A.

$$\begin{aligned} -3\times(-1)+2\times 3+c &= 0\\ 3+6+c &= 0\\ c &= -9 \end{aligned}$$

A savoir (2)

Comme le point A est sur la droite, ses coordonnées $(\underbrace{-1}_{x}\ ;\ \underbrace{3}_{y})$ vérifient l'équation $-3x+2y+c=0$.

D'où :

$$\Delta_1 \quad : \quad -3x+2y-9=0$$

• Δ_2 est la droite qui passe par A et qui est perpendiculaire à la droite d, d ayant pour vecteur normal $\vec{n}(\underbrace{-3}_{=-b}\ ;\ \underbrace{2}_{=a})$.

Ce vecteur est donc un vecteur directeur de Δ_2.

A savoir(3)

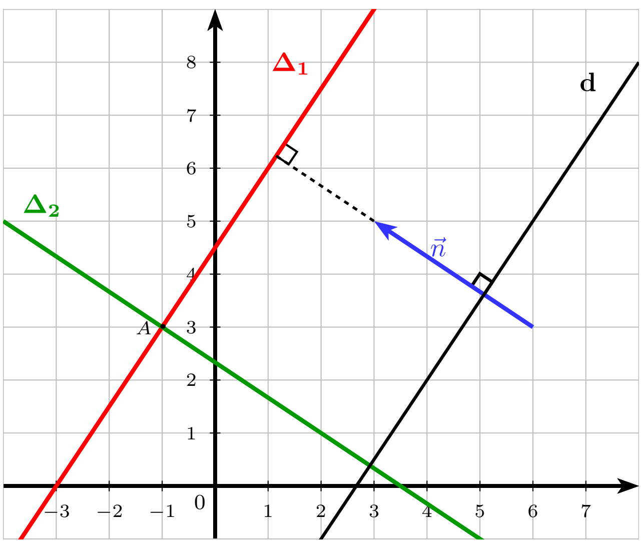
Toute droite de vecteur directeur $\vec{n}(-b\ ;\ a)$ admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$.

Par conséquent $-b=-3$ soit $b=3$ et $a=2$.
On en déduit : $\Delta_2 : 2x+3y+c=0$. On trouve c en utilisant les coordonnées du point A.

$$\begin{aligned} 2\times(-1)+3\times 3+c &= 0\\ c &= -7 \end{aligned}$$

D'où :

$$\Delta_2 \quad : \quad 2x+3y-7=0$$



b. • Δ_1 est la droite qui passe par A et qui est parallèle à la droite d, d ayant pour vecteur directeur $\vec{u}(2\ ;\ 1)$.
Le vecteur $\vec{u}(\underbrace{2}_{=-b}\ ;\ \underbrace{1}_{=a})$ est donc aussi un vecteur directeur de Δ_1. On en déduit $-b = 2$ soit $b = -2$ et $a = 1$.

Ainsi, $\Delta_1 : x - 2y + c = 0$.

On trouve c en utilisant les coordonnées du point A.

$$\begin{aligned} 5 - 2 \times 2 + c &= 0 \\ c &= -1 \end{aligned}$$

D'où :

$$\Delta_1 \quad : \quad x - 2y - 1 = 0$$

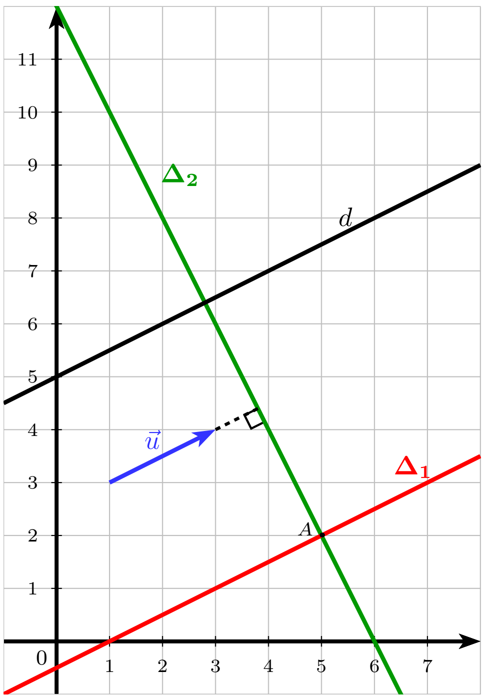
• Δ_2 est la droite qui passe par A et qui est perpendiculaire à la droite d, d ayant pour vecteur directeur $\vec{u}(2\ ;\ 1)$.
Δ_2 est donc l'ensemble des points M tels $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$.
Or $\overrightarrow{AM}(x - 5\ ;\ y - 2)$.

On change
J'ai choisi une autre méthode pour déterminer une équation cartésienne de Δ_2.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0 &\Longleftrightarrow 2(x-5) + 1(y-2) = 0 \\ &\Longleftrightarrow 2x + y - 12 = 0 \end{aligned}$$

D'où :

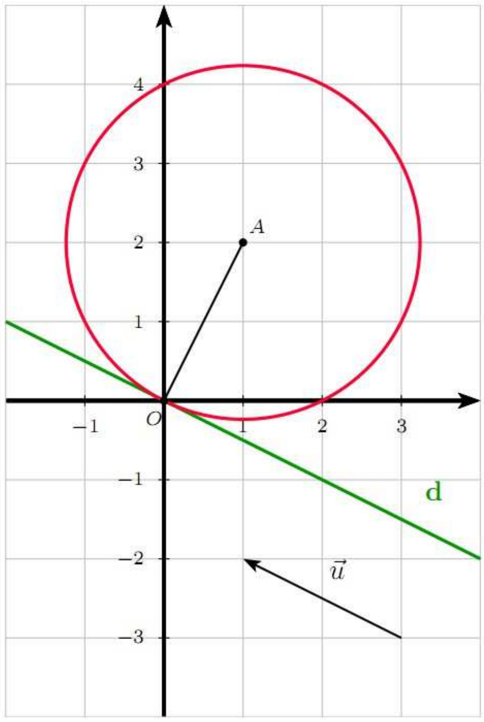
$$\Delta_2 \quad : \quad 2x + y - 12 = 0$$



Exercice 2

Tangente à un cercle

Soit d une droite passant par un point M d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre I.
Si d est perpendiculaire au rayon $[IM]$, alors d est tangente au cercle $\mathscr{C}$.
Avec la figure on conjecture en quel point la droite est tangente au cercle.
Puis, on le montre en justifiant que ce point est bien sur la droite et qu'en ce point, la droite est bien perpendiculaire au rayon. Voilà pour la méthode !



On trace la droite d avec deux points (par exemple) ou on l'écrit sous forme réduite $y = \dfrac{1}{2}x$ et on la trace avec l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur.... au choix.

Il semblerait que la droite d soit tangente au cercle en O.

Un vecteur directeur de la droite d est $\vec{u}(-b\ ;\ a)$ avec $b = 2$ et $a = 1$, donc $\vec{u}(-2\ ;\ 1)$.

Le cercle de centre A passant par O est tangent à d si et seulement si $O \in d$ et $\vec{u} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$.

- $O \in d$ car $0 + 2 \times 0 = 0$;

- Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ a pour coordonnées $(1\ ;\ 2)$.

Ainsi $\vec{u} \cdot \overrightarrow{OA} = -2 \times 1 + 1 \times 2 = 0$.
Par conséquent, le cercle est bien tangent à la droite d en O.

Exercice 3

1. $\overrightarrow{MA}(-1 - x\ ;\ 4 - y)$ et $\overrightarrow{MB}(5 - x\ ;\ 2 - y)$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (-1 - x)(5 - x) + (4 - y)(2 - y) \\ &= x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3\end{aligned}$$

2. On en déduit que l'égalité $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 15$ est équivalente à :

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 &= 15 \\ x^2 - 4x + y^2 - 6y &= 11 \\ \boxed{x^2 - 4x} + \boxed{y^2 - 6y} &= 12 \\ \boxed{(x - 2)^2 - 4} + \boxed{(y - 3)^2 - 9} &= 12 \\ (x - 2)^2 + (y - 3)^2 &= 12 + 4 + 9 \\ (x - 2)^2 + (y - 3)^2 &= 5^2\end{aligned}$$

Explications

$x^2 - 4x$ est le début du carré de $(x - 2)$.
On a $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$.
De même $y^2 - 6y$ est le début du carré de $(y - 3)$.
On a $y^2 - 6y = (y - 3)^2 - 9$.

On reconnaît l'équation du cercle de centre $I(2\ ;\ 3)$ et de rayon 5. On en déduit que ligne décrite par le point M est le cercle de centre $I(2\ ;\ 3)$ et de rayon 5.