MATHEMATIQUES

Géométrie repérée : entraînement savoir-faire (Corrigé)

Exercice 1

Deux méthodes sont possibles :

1ère méthode :

Une équation cartésienne de la droite d est de la forme $ax + by + c = 0$.

- On commence par identifier les réels a et b à l'aide du vecteur normal $\vec{n}$:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

  d'où $a = 3$ et $a = 2$.
  On obtient ainsi $3x + 2y + c = 0$.

- On retrouve alors le réel c en exprimant l'appartenance du point A à la droite d :
  $\mathrm{A} \in d \iff 3x_A + 2y_\mathrm{A} + c = 0$
  $\iff 3 \times 1 + 2 \times (-4) + c = 0$
  $\iff c = 5$

  Explication
  Comme le point A est sur la droite, ses coordonnées $(\underbrace{1}_{x} ; \underbrace{4}_{y})$ vérifient l'équation $3x + 2y + c = 0$.

  On obtient ainsi une équation cartésienne de la droite d : $3x + 2y + 5 = 0$.

2nde méthode :

Soit $\mathrm{M}(x \ ; \ y)$ un autre point de la droite d.

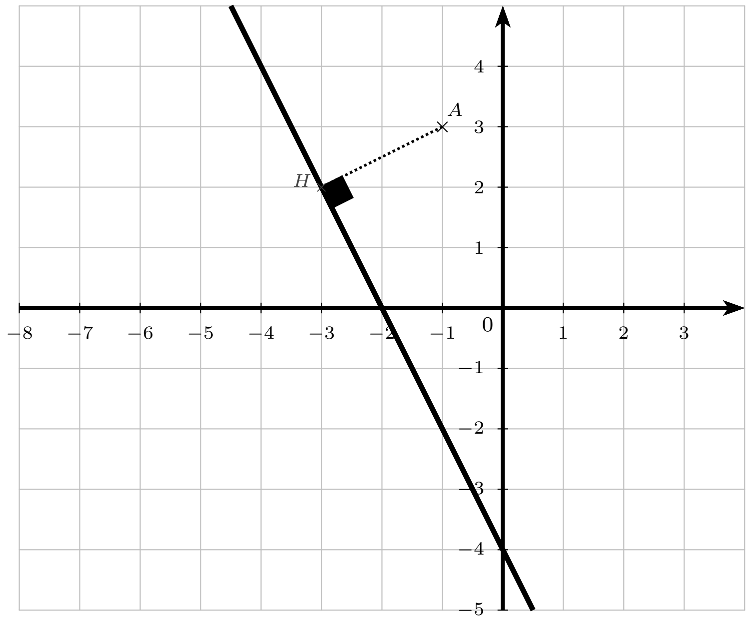
Les vecteurs $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+4 \end{pmatrix}$ sont donc orthogonaux et par conséquent, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

On obtient alors

$$3(x-1) + 2(y+4) = 0 \iff 3x + 2y + 5 = 0$$

On retrouve ainsi directement une équation cartésienne de d.

Exercice 2



On note $H(x_H\ ;\ y_H)$ le projeté orthogonal de A sur la droite d.

La droite d a pour équation $2x + y + 4 = 0$, donc un vecteur directeur de cette droite est $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

De plus, $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}x_H + 1\\y_H - 3\end{pmatrix}$.

H est le projeté orthogonal de A sur d, donc $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$.
Ainsi, $-1 \times (x_H + 1) + 2 \times (y_H - 3) = 0$, soit $-x_H + 2y_H - 7 = 0$.

H est aussi sur la droite d, donc ses coordonnées vérifient aussi $2x_H + y_H + 4 = 0$.
Les coordonnées x_H et y_H vérifient donc le système :

$$\begin{cases}-x_H + 2y_H - 7 = 0\\2x_H + y_H + 4 = 0\end{cases} \iff \begin{cases}-x_H + 2(-4 - 2x_H) - 7 = 0\\y_H = -4 - 2x_H\end{cases} \iff \begin{cases}-5x_H - 15 = 0\\y_H = -4 - 2x_H\end{cases} \iff \begin{cases}x_H = -3\\y_H = 2\end{cases}.$$

Finalement, $H(-3\ ;\ 2)$.

Exercice 3

1. • Pour $\mathscr{C}_1$:

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0$$
$$\boxed{x^2 + 4x} + \boxed{y^2 - 2y} = 11$$
$$\boxed{(x+2)^2 - 4} + \boxed{(y-1)^2 - 1} = 11$$
$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 11 + 4 + 1$$
$$(x - (-2))^2 + (y-1)^2 = 4^2$$

Explications

$x^2 + 4x$ est le début du carré de $(x+2)$.
On a $x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4$.
De même $y^2 - 2y$ est le début du carré de $(y-1)$.
On a $y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1$.

Le cercle $\mathscr{C}_1$ a pour centre $\Omega_1(-2\ ;\ 1)$ et pour rayon $\mathrm{R}_1 = 4$.

- Pour $\mathscr{C}_2$:

$$\begin{aligned}
2x^2+2y^2-12x+8y-10&=0\\
x^2+y^2-6x+4y-5&=0 \quad \text{On a simplifié par 2.}\\
\boxed{x^2-6x}+\boxed{y^2+4y}&=5\\
\boxed{(x-3)^2-9}+\boxed{(y+2)^2-4}&=5\\
(x-3)^2+(y-(-2))^2&=5+4+9\\
(x-3)^2+(y-(-2))^2&=18\\
(x-3)^2+(y-(-2))^2&=(3\sqrt{2})^2
\end{aligned}$$

Le cercle $\mathscr{C}_2$ a pour centre $\Omega_2(3\ ;\ -2)$ et pour rayon $\mathrm{R}_2=3\sqrt{2}$.

2. On utilise la caractérisation du cercle par le produit scalaire pour répondre à cette question.

Conseil

Utilisez cette méthode quand on connaît un diamètre du cercle. C'est plus rapide.... Après si vous avez le temps, vous pouvez aussi utiliser la deuxième méthode qui est décrite un peu plus bas.

$\mathrm{M}(x\ ;\ y)$ est un point du cercle $\mathscr{C}$ si et seulement si $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ avec $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-2-x\\4-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}1-x\\-3-y\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 &\iff (-2-x)\times(1-x)+(4-y)\times(-3-y)=0\\
&\iff -2+2x-x+x^2-12-4y+3y+y^2=0\\
&\iff x^2+y^2+x-y-14=0
\end{aligned}$$

Le cercle $\mathscr{C}$ admet comme équation cartésienne $x^2+y^2+x-y-14=0$.

Autre méthode

On pouvait calculer les coordonnées du milieu I de $[AB]$ qui est le centre du cercle dont on cherche une équation, puis calculer le rayon du cercle qui n'est autre que IA, puis en déduire une équation du cercle puisque une équation du cercle de centre $I(x_I\ ;\ y_I)$ et de rayon R est donnée par :

$$(x-x_I)^2+(y-y_I)^2=R^2$$