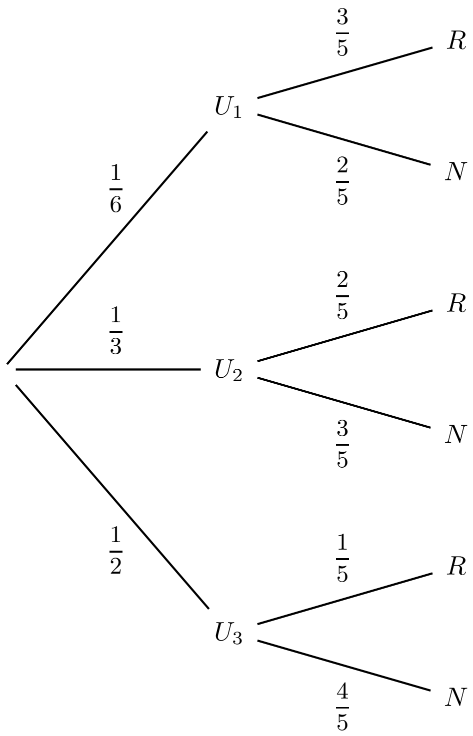
MATHEMATIQUES
Probabilités conditionnelles - Indépendance : corrigé entraînement (1)

Exercice 1

1. Illustrons cette situation par un arbre pondéré où U_k $(k \in \{1, 2, 3\})$, et R désignent respectivement les événements : « la boule est extraite de l'urne k »
et « la boule obtenue est rouge ». :



Conseil

Même si l'énoncé ne le précise pas, faites un arbre pour représenter la situation..... on y voit plus clair avec !

La probabilité cherchée est $P(R \cap U_1)$.

Remarque

$R \cap U_1$ est représenté par la branche (le chemin) supérieure de l'arbre. La probabilité est obtenu par le produit des probabilités inscrites sur chacune des branches.

On a : $P(R \cap U_1) = P(U_1) \times P_{U_1}(R)$ et donc $P(R \cap U_1) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{10}$.

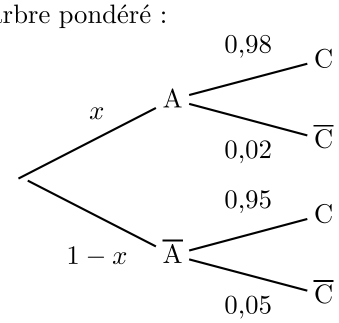
2. Les événements U_1, U_2 et U_3 représentent une partition de Ω.
On a alors d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(R) &= P(R \cap U_1) + P(R \cap U_2) + P(R \cap U_3) \\
&= P_{U_1}(R) \times P(U_1) + P_{U_2}(R) \times P(U_2) + P_{U_3}(R) \times P(U_3) \\
&= \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Exercice 2

1. L'énoncé donne $P(A) = x \quad , \quad P_A(C) = 0,98 \quad \text{et} \quad P_{\overline{A}}(C) = 0,95$.

On représente donc la situation par l'arbre pondéré :



A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers donc d'après les probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C \cap A) + P\left(C \cap \overline{A}\right) \\ &= P_A(C) \times P(A) + P_{\overline{A}}(C) \times P\left(\overline{A}\right) \\ &= 0,98x + 0,95(1-x) \\ &= 0,03x + 0,95 \end{aligned}$$

2. $P(C) = 0,96 \iff 0,03x + 0,95 = 0,96 \iff x = \dfrac{1}{3}$

Donc $P(A) = \dfrac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(B) = P\left(\overline{A}\right) = \dfrac{2}{3}$

La probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est donc bien égale au double de celle que la tablette provienne de la chaîne A.

Exercice 3

1. Il y a $60 - (25 + 8 + 15) = 60 - 48 = 12$ cadres hommes, donc 20 cadres en tout dont 8 femmes.

La probabilité est donc égale à $\dfrac{8}{20} = \dfrac{4}{10} = 0,4 = \dfrac{2}{5}$.

Explication

C'est une probabilité conditionnelle qui est demandée ici. Pour déterminer cette probabilité, on utilise la formule : $p_C(F) = \dfrac{\text{Nombre de femmes cadres}}{\text{Nombre de cadres}}$.

2. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$P(G) = P(A \cap G) + P(B \cap G) = 0,35 \times 0,3 + 0,65 \times x = 0,105 + 0,65x$.

A et G étant indépendants, on a : $P(A \cap G) = P(A) \times P(G)$.

Méthode

On calcule d'une part $P(A \cap G)$ et d'autre part $P(A) \times P(G)$. C'est l'égalité de ces deux probabilités qui permet d'obtenir la valeur de x.

$$\begin{aligned} P(A \cap G) &= P(A) \times P(G) \\ 0,35 \times 0,3 &= 0,35 \times (0,105 + 0,65x) \\ 0,105 &= 0,036\,75 + 0,227\,5x \\ 0,227\,5x &= 0,068\,25 \\ x &= \frac{0,068\,25}{0,227\,5} = 0,3 \end{aligned}$$

3. C et D étant indépendants, on a $p(C \cap D) = p(C) \times p(D) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{36}$.

D'où :

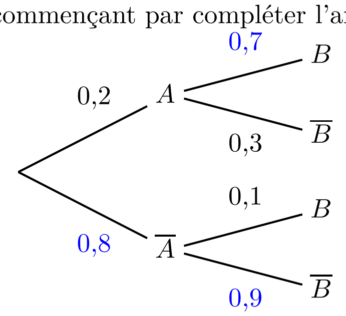
$$p(C \cup D) = p(C) + p(D) - p(C \cap D) = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{36} = \frac{12+3-1}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}.$$

Rappel

Soit A et B deux événements, on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

4. On teste chacune des propositions en commençant par compléter l'arbre pondéré :



- $p(B) = p(A \cap B) + p\left(\overline{A} \cap B\right) = 0,2 \times 0,7 + 0,8 \times 0,1 = 0,14 + 0,08 = 0,22$.
- $p\left(\overline{A} \cap B\right) = 0,8 \times 0,1 = 0,08$.
- $p_B(A) = \dfrac{p(B \cap A}{p(B)} = \dfrac{0,2 \times 0,7}{0,22} = \dfrac{0,14}{0,22} = \dfrac{14}{22} = \dfrac{7}{11}$.

Exercice 4

1. Comme les feux ne sont pas synchronisés, le fait qu'un des deux feux soit vert, orange ou rouge, n'influe pas la couleur de l'autre. On peut donc considérer que le passage devant ces deux fois comme une répétition de deux épreuves indépendantes. De plus, les cycles étant les mêmes (temps du vert, rouge ou orange) on peut dire que ces deux épreuves sont identiques.

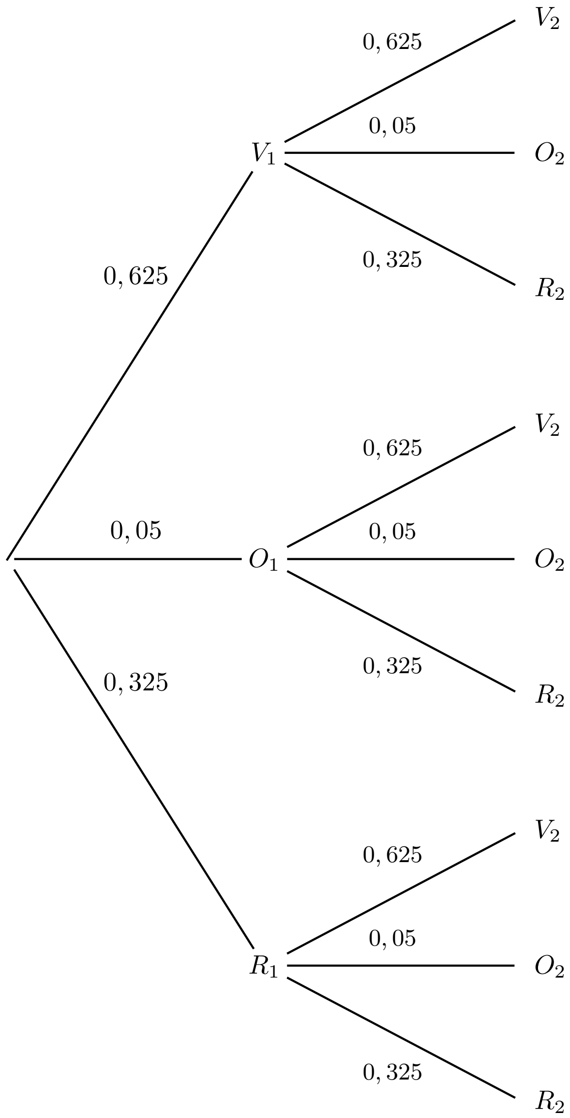
Vocabulaire

On parle d'une répétition de deux épreuves identiques et indépendantes. Les probabilités sur les deux niveaux de branches seront donc les mêmes.

2. Le premier niveau de l'arbre correspond au premier feu et le second niveau au second feu.

- Comme le feu vert dure 50 secondes sur les 80 secondes d'un cycle, on a : $p(V) = \dfrac{50}{80} = 0,625$.
- Comme le feu orange dure 4 secondes sur les 80 secondes d'un cycle, on a : $p(O) = \dfrac{4}{80} = 0,05$.
- Comme le feu rouge dure 26 secondes sur les 80 secondes d'un cycle, on a : $p(R) = \dfrac{26}{80} = 0,325$.

Les cycles des deux feux étant identiques, on a :



3. Nabolos rencontre les deux feux verts est l'événement $V_1 \cap V_2$.

Comme les événements V_1 et V_2 sont indépendants, on a :

$$p(V_1 \cap V_2) = p(V_1) \times p(V_2) = 0,625 \times 0,625 \simeq 0,39$$

4. a. Nabolos s'arrête a deux reprises s'il ne rencontre jamais de feu vert, soit $O_1 \cap O_2$, $O_1 \cap R_2$, $R_1 \cap O_2$ et $R_1 \cap R_2$.

Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} p_1 & = & p(O_1 \cap O_2) + p(O_1 \cap R_2) + p(R_1 \cap O_2) + p(R_1 \cap R_2) \\ & = & 0,05 \times 0,05 + 0,05 \times 0,325 + 0,325 \times 0,05 + 0,325 \times 0,325 \\ & \simeq & 0,14 \end{array}$$

Conseil

Utilisez l'arbre pour donner les 4 chemins réalisant la situation. N'oubliez pas qu'il s'arrête lorsque le feu est orange ou rouge.

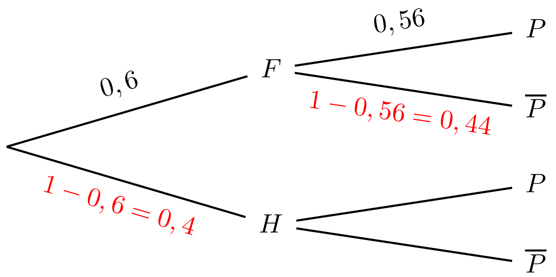
b. Nabolos ne s'arrête qu'une seule fois lorsque il a un feu vert sur les deux, soit $V_1 \cap O_2$, $V_1 \cap R_2$, $O_1 \cap V_2$ et $R_1 \cap V_2$.

Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} p_2 & = & p(V_1 \cap O_2) + p(V_1 \cap R_2) + p(O_1 \cap V_2) + p(R_1 \cap V_2) \\ & = & 0,625 \times 0,05 + 0,625 \times 0,325 + 0,05 \times 0,625 + 0,325 \times 0,625 \\ & \simeq & 0,47 \end{array}$$

Exercice 5

On regroupe les données du texte dans un arbre pondéré :



Conseils

36 % de la population travaillent à temps partiel est la probabilité de l'événement P. Celle-ci ne doit pas apparaître sur une branche de l'arbre. Ecrivez-là dans un petit coin (cela montrera que vous avez bien interprété les données de l'énoncé.... c'est déjà ça :-).

On a aussi d'après le texte, $p(P) = 0,36$.
On cherche à déterminer la probabilité que la personne interrogée soit un homme, c'est à dire :

$$p_P(H) = \frac{p(P \cap H)}{p(P)}.$$

Conseils

Pour bien commencer, écrivez la probabilité que l'on vous demande de calculer et regardez ce qu'il vous manque pour la déterminer.

Dans cette formule, on connaît $p(P) = 0,36$ mais il nous manque $p(P \cap H)$.

D'après la formule des probabilités totales (F et H forment une partition de l'univers) :

$p(P) = p(F \cap P) + p(H \cap P) = p(F) \times p_F(P) + p(H \cap P)$.

Pensez-y !

Pour calculer la probabilité manquante, vous devez penser à la formule des probabilités totales (avec un soupçon d'initiative ...)

$$\begin{array}{rcl} 0,36 & = & 0,6 \times 0,56 + p(H \cap P) \\ 0,36 & = & 0,336 + p(H \cap P) \\ 0,36 - 0,336 & = & p(H \cap P) \\ p(H \cap P) & = & 0,024 \end{array}$$

Ainsi : $p_P(H) = \dfrac{p(P \cap H)}{p(P)} = \dfrac{0,024}{0,36} = \dfrac{1}{15}$