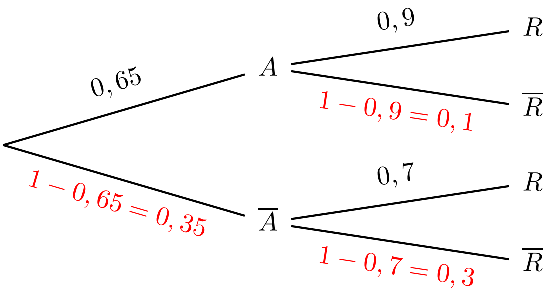
MATHEMATIQUES
Probabilités conditionnelles - Indépendance : corrigé entraînement (2)

Exercice 1

1. On traduit cette situation par un arbre pondéré :



2. a. L'événement « faire l'aller-retour en bateau » est l'événement $A \cap R$.
D'après l'arbre : $p(A \cap R) = p(A) \times p_A(R) = 0,65 \times 0,9 = 0,585$.

b. L'agence annonce que $p(R) = 0,83$. On calcule $p(R)$ grâce à la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(R) &= p(A \cap R) + p(\overline{A} \cap R) \\ &= 0,585 + 0,35 \times 0,7 \\ &= 0,83 \end{aligned}$$

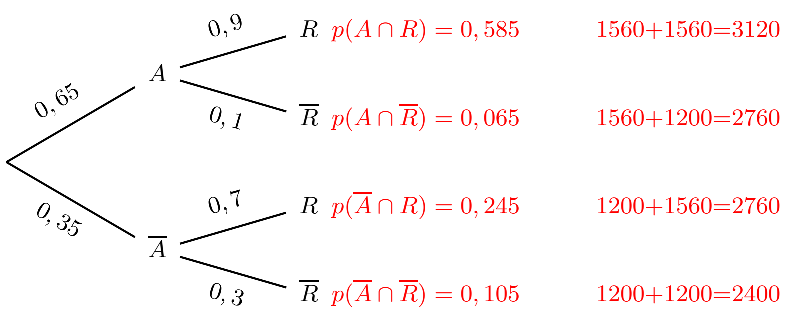
Ainsi, il y a bien 83 % des clients qui prennent le bateau au retour. L'agence a raison.

c. Le client utilise les deux moyens de transport dans les événements $A \cap \overline{R}$ (aller en bateau et retour en train) et $\overline{A} \cap R$ (aller en train et retour en bateau).
Ces deux événement sont disjoints donc :
$p\left(A \cap \overline{R} \cup \overline{A} \cap R\right) = p\left(A \cap \overline{R}\right) + p\left(\overline{A} \cap R\right) = 0,65 \times 0,1 + 0,35 \times 0,7 = 0,31$.

3. Le coût d'un trajet aller ou d'un trajet retour est de 1 560 € en bateau ; il est de 1 200 € en train.

On écrit en bout de branche, les valeurs possibles du coût et les probabilités correspondantes. On obtient :

Coût de l'aller/retour :

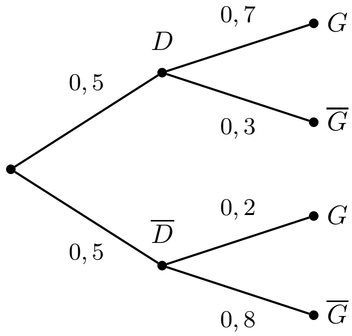


On a donc :

Coût	3 120	2 760	2 400
Probabilité	0,585	0,31	0,105

Exercice 2

1.



• 0,7 est la probabilité que le joueur gagne sachant qu'il a choisi la console déréglée.

• $p(\bar{D}) = 1 - p(D) = 1 - 0,5 = 0,5.$

• $p_D(\bar{G}) = 1 - p_D(G) = 1 - 0,7 = 0,3$

• $p_{\bar{D}}(\bar{G}) = 1 - p_{\bar{D}}(G) = 1 - 0,2 = 0,8$

Conseils

• Traduisez la phrase de l'énoncé avec les événements D et G.
• Utilisez l'arbre pour vous repérer (vous pouvez entourer le chemin qui correspond à la probabilité demandée. Le résultat est le produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.

2. L'évènement « le joueur choisit la console déréglée et gagne » correspond à l'évènement $D \cap G$.
$p(D \cap G) = p(D) \times p_D(G) = 0,5 \times 0,7 = 0,35.$

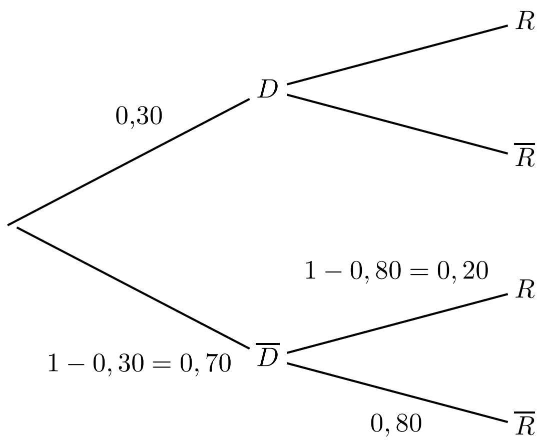
3. D'après la formule des probabilités totales (D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers) :

$$p(G) = \underbrace{p(D \cap G)}_{p(D)\times p_D(G)} + \underbrace{p(\bar{D} \cap G)}_{p(\bar{D})\times p_{\bar{D}}(G)} = 0,5 \times 0,7 + 0,5 \times 0,2 = 0,35 + 0,10 = 0,45.$$

4. Calculer la probabilité que la joueur ait choisi la console déréglée sachant qu'il a gagné revient à déterminer $p_G(D)$:
$p_G(D) = \dfrac{p(D \cap G)}{p(G)} = \dfrac{0,35}{0,45} = \dfrac{35}{45} = \dfrac{7}{9} \simeq 0,78.$(résultat arrondi à 10^{-2} près)

Exercice 3

1. a. On représente la situation par un arbre pondéré :



Attention

La probabilité 0,38 n'apparaît pas dans l'arbre. C'est $p(R)$.

b. Le candidat n'a pas un dossier de bonne qualité et n'est pas recruté par l'entreprise correspond à l'évènement $\overline{D} \cap \overline{R}$.
$p\left(\overline{D} \cap \overline{R}\right) = p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(\overline{R}) = 0,7 \times 0,8 = 0,56.$

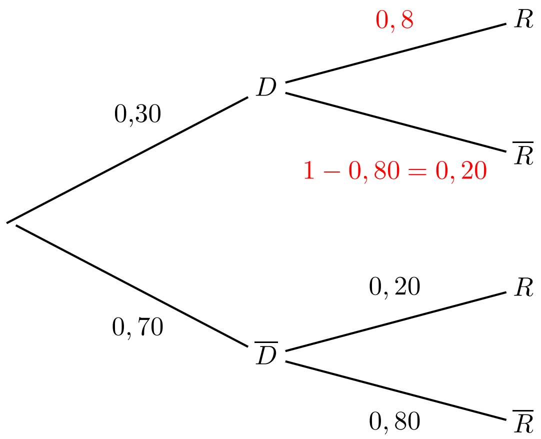
c. D'après l'énoncé, on sait que $P(R) = 0,38$.
En utilisant la formule des probabilités totales (D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers) :

$$p(R) = p\,(D \cap R) + p\left(\overline{D} \cap R\right)$$

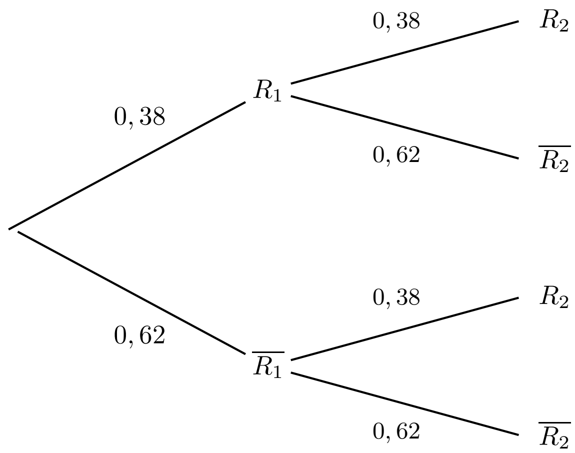
Ainsi :

$$\begin{array}{rcll}
\underbrace{0,38}_{p(R)} & = & P(D \cap R) + \underbrace{0,7 \times 0,2}_{p\left(\overline{D} \cap R\right)} & \\
0,38 - 0,14 & = & P(D \cap R) & \text{On retranche 0,14 dans chaque membre} \\
P(D \cap R) & = & 0,24 &
\end{array}$$

d. Un candidat est recruté sachant que son dossier est jugé de bonne qualité correspond à l'évènement $P_D(R)$.
$P_D(R) = \dfrac{P(D \cap R)}{P(D)} = \dfrac{0,24}{0,3} = 0,8$.
On peut donc compléter l'arbre pondéré :



2. a. La probabilité qu'une personne soit recrutée est 0,38. Les études de leurs candidatures sont faites indépendamment. Les probabilités sur les deux niveaux de branches sont donc les mêmes :



b. Au moins une des deux personnes est recrutée correspond à : $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cap \overline{R_2}$ et $\overline{R_1} \cap R_2$.
Comme les événements R_1 et R_2 sont indépendants, la probabilité qu'au moins un des deux candidats est recruté est :

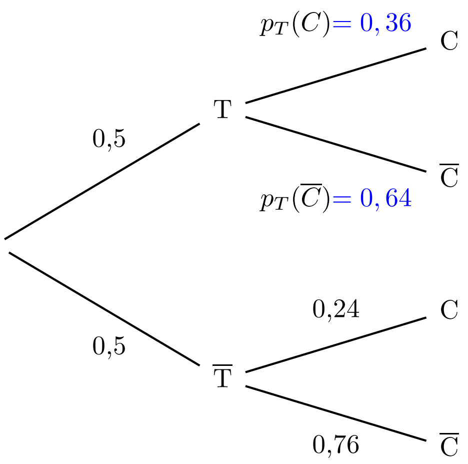
$$p = p(R_1 \cap R_2) + p(R_1 \cap \overline{R_2}) + p(\overline{R_1} \cap R_2) = 0,38 \times 0,38 + 0,38 \times 0,62 + 0,62 \times 0,38 = 0,6156$$

Avec l'événement contraire

Le contraire de "au moins un" est "aucun". Ainsi, pour calculer la probabilité qu' au moins une des deux personnes soit recrutée, on pouvait calculer la probabilité de son événement contraire : "aucune des personnes n'est recrutée" : $p(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}) = p(\overline{R_1}) \times p(\overline{R_2}) = 0,62 \times 0,62 = 0,3844$.
La probabilité qu'au moins une des deux personnes soit recrutée est $1 - 0,3844 = 0,6156$.

Exercice 4

On modélise la situation par un arbre :



Attention

0,3 ne doit pas apparaître sur cet arbre. En effet ce nombre est la probabilité de l'événement C. Ce n'est pas une probabilité conditionnelle.

1. La probabilité que le pigeon soit tué et le fil coupé est bien de 0,18.
En effet, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{array}{rcl} p(C) & = & p(T\cap C)+p(\overline{T}\cap C) \\ p(T\cap C) & = & p(C)-p(\overline{T}\cap C) \\ p(T\cap C) & = & p(C)-p(\overline{T})\times p_{\overline{T}}(C) \\ p(T\cap C) & = & 0,3-0,5\times 0,24 \\ p(T\cap C) & = & 0,18 \end{array}$$

2. La probabilité permettant de répondre à cette question est : $p(T\cap\overline{C})$.

On a d'après la question précédente $p(T\cap C)=0,18$.

Ainsi, $p_T(C)=\dfrac{P(T\cap C)}{P(T)}=\dfrac{0,18}{0,5}=0,36$.

Comme $p_T(\overline{C})=1-p_T(C)=1-0,36=0,64$.

Donc, $p(T\cap\overline{C})=p(T)\times p_T(\overline{C})=0,5\times 0,64=0,32$.

Conseil

Identifiez bien la probabilité qu'il faut calculer. Pour obtenir celle qui nous intéresse ici, on a besoin d'en calculer d'autres. Complétez l'arbre au fur et à mesure des résultats.

La probabilité qu'il rentre de la chasse avec un pigeon et qu'il puisse raconter ses exploits au téléphone est de 0,64.

Explication

Sa femme est en train de téléphoner. Nanolos n'a donc pas coupé le fil du téléphone.

3. On doit calculer $p_{\overline{C}}(\overline{T})$.

$p_{\overline{C}}(\overline{T})=\dfrac{p(\overline{C}\cap\overline{T})}{p(\overline{C})}=\dfrac{0,5\times 0,76}{1-0,3}\simeq 0,54.$

Sachant que sa femme est en train de téléphoner, donc que le fil n'est pas coupé, la probabilité qu'il soit bredouille est d'environ 0,54.

4. $p(T\cap\overline{C})=0,5\times 0,64=0,32$ et $p(T)\times p(\overline{C})=0,5\times 0,7=0,35$.

Donc, pour Nanolos, les évènements « téléphoner » et « manger du pigeon » ne sont pas indépendants.