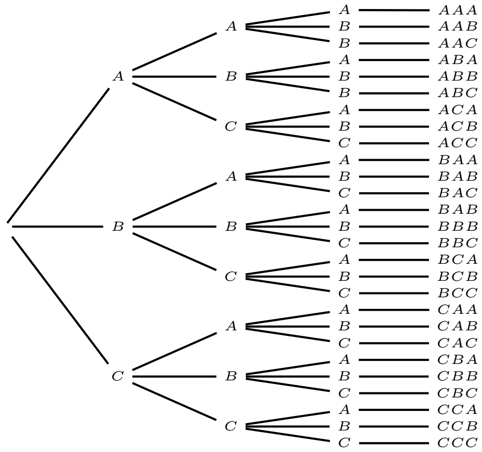
MATHEMATIQUES
Probabilités : pour réviser (corrigé)

Exercice 1



1. Comme les lettres peuvent être répétées, on a trois choix pour la première lettre, trois choix pour la deuxième et trois choix pour la troisième.

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

Il y a 27 codes possibles.
Même si ce n'était pas recommandé pour cet exercice, on peut schématiser la situation avec un arbre :

2. a. Il y a 9 codes qui commencent par la lettre A :

$$\underbrace{1}_{\substack{\text{1ère lettre :}\\ \text{une}\\ \text{possibilité}\\ \text{(A)}}} \times \underbrace{3}_{\substack{\text{2ème lettre :}\\ \text{trois}\\ \text{possibilités}}} \times \underbrace{3}_{\substack{\text{3ème lettre :}\\ \text{trois}\\ \text{possibilités}}} = 9$$

Les 27 issues sont équiprobables. La loi de probabilité sur Ω est équirépartie, ainsi,

$$P(E) = \frac{\text{nombre d'issues réalisant E}}{\text{nombre d'issues de } \Omega} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

b. • On dénombre le nombre de codes avec trois lettres distinctes :

$$\underbrace{3}_{\substack{\text{1ère lettre :}\\ \text{trois}\\ \text{possibilités}\\ \text{(A, B ou C)}}} \times \underbrace{2}_{\substack{\text{2ème lettre :}\\ \text{deux}\\ \text{possibilités}}} \times \underbrace{1}_{\substack{\text{3ème lettre :}\\ \text{une}\\ \text{possibilité}}} = 6$$

Explications

Une fois que la première lettre est fixée (A, B ou C), il ne reste plus que deux choix pour la deuxième, puis un seul pour la troisième. Les six codes sont ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

Ainsi, $P(T) = \dfrac{6}{27} = \dfrac{2}{9}$.

• On dénombre le nombre de codes composés d'une seule lettre :

$$\underbrace{3}_{\substack{\text{1ère lettre :}\\ \text{trois}\\ \text{possibilités}\\ \text{(A, B ou C)}}} \times \underbrace{1}_{\substack{\text{2ème lettre :}\\ \text{une}\\ \text{possibilité}}} \times \underbrace{1}_{\substack{\text{3ème lettre :}\\ \text{une}\\ \text{possibilité}}} = 3$$

Explications

Une fois que la première lettre est fixée (A, B ou C), il ne reste plus qu'un seul choix pour les autres lettres.
Si c'est le A en premier, il faut alors A puis A, si c'est le B, il faut alors B puis B et si c'est le C, il faut ensuite C puis C. Les trois codes sont AAA, BBB et CCC.

Ainsi, $P(U) = \dfrac{3}{27} = \dfrac{1}{9}$.

c. Si on rassemble les événements T, U et D, on obtient l'univers. En effet, le code est soit composé de trois lettres distinctes, soit de deux lettres distinctes soit d'une seule lettre.

$$\underbrace{27}_{\text{nombre total de codes}} - \underbrace{6}_{\text{nombre de codes avec 3 lettres distinctes}} - \underbrace{3}_{\text{nombre de codes avec une lettre}} = 18$$

Il y a donc 18 codes avec deux lettres distinctes.

$$P(D) = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$$

3. • $\overline{E}$ est l'événement : « Le code ne commence pas par A ».
$P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

• $E \cap D$ est l'événement : « Le code commence par la lettre A et est composé de deux lettres distinctes ».
Il y en a six : AAB, AAC, ABA, ABB, ACA et ACC. Ainsi, $P(E \cap D) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.

• $E \cup D$ est l'événement : « Le code commence par la lettre A ou est composé de deux lettres distinctes ».
$P(E \cup D) = P(E) + P(D) - P(E \cap D) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.

Exercice 2

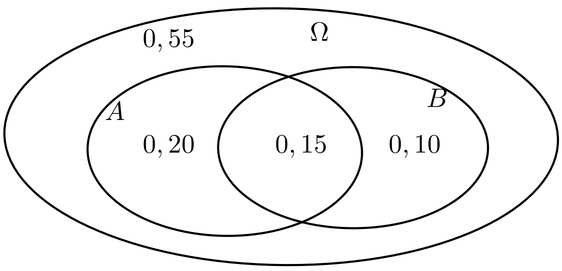
a. $E = A \cup B$, donc $P(E) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,35 + 0,25 - 0,15 = 0,45$.

b. $F = \overline{A \cup B}$, donc $P(F) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 045 = 0,55$.

c. $G = A \cap \overline{B}$, donc $P(G) = P(A \cap \overline{B}) = 0,35 - 0,15 = 0,2$.

d. $H = \underbrace{(A \cap \overline{B})}_{\text{seulement le cyclisme}} \cup \underbrace{(\overline{A} \cap B)}_{\text{seulement le tennis}}$, donc $P(H) = P((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = 0,20 + 0,10 = 0,30$.

Avec les données de l'énoncé, on obtient le diagramme suivant :



Exercice 3

1. • 19 % de 2000 $= 0,19 \times 2000 = 380$. Il y a 380 élèves en terminale.

• 55 % de 380 $= 0,55 \times 380 = 209$. Il y a 209 filles en terminale.

• 85 % de 380 $= 0,85 \times 380 = 323$. Il y a 323 élèves qui ont réussi le baccalauréat.

• $380 - 323 = 57$. Le nombre d'élèves ayant échoué est 57.
$\dfrac{8}{19} \times 57 = 24$. Ainsi, 24 filles ont échoué au baccalauréat.

On obtient le tableau :

Éleves	Garçons	Filles	TOTAL
Réussite	138	185	323
Échec	33	24	57
TOTAL	171	209	380

Comme on est dans une situation d'équiprobabilité, on calcule les probabilités avec : $P(A) = \dfrac{\text{nombre d'issues réalisant A}}{\text{nombre d'issues de }\Omega}$.

2. a. $\overline{G}$ est l'événement : « L'élève est une fille ».
$P(\overline{G}) = \dfrac{\text{nombre de filles}}{\text{nombre total d'élèves}} = \dfrac{209}{380} = 0,55$.

b. $\overline{G} \cap R$ est l'événement : « L'élève est une fille qui a réussi le baccalauréat ».

$$P(\overline{G} \cap R) = \frac{\text{nombre de filles ayant eu le baccalauréat}}{\text{nombre total d'élèves}} = \frac{185}{380} \simeq 0,49.$$

3. a. $\overline{R}$ est l'événement : « L'élève n'a pas réussi son baccalauréat ».

$$P(\overline{R}) = \frac{\text{nombre d'élèves qui a échoué au baccalauréat}}{\text{nombre total d'élèves}} = \frac{57}{380} = 0,15.$$

b. $\overline{G} \cup \overline{R}$ est l'événement : « L'élève est une fille ou l'élève a échoué au baccalauréat ».

$$P(\overline{G} \cup \overline{R}) = P(\overline{G}) + P(\overline{R}) - P(\underbrace{\overline{G} \cap \overline{R}}_{\text{Fille qui a échoué au bac}}) = 0,55 + 0,15 - \frac{24}{380} \simeq 0,64.$$

4. On sait maintenant que l'on choisi un élève parmi les bacheliers, donc l'univers devient l'ensemble des bacheliers (il est constitué de 323 issues).

Ainsi, $P = \dfrac{\text{nombre de filles qui ont réussi au baccalauréat}}{\text{nombre de bacheliers}} = \dfrac{185}{323} \simeq 0,57$.