MATHEMATIQUES

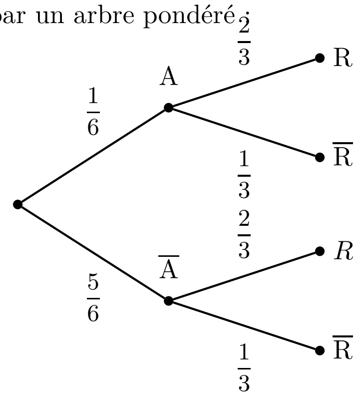
Probabilités conditionnelles et indépendance : entraînement savoir-faire (2) (corrigé)

Exercice 1

Méthode

Pour montrer que les deux événements A et R sont indépendants, on montre que $P(A \cap R) = P(A) \times P(R)$.
Il faut donc calculer $P(R)$ et pour cela, on utilise un arbre pondéré pour faciliter la tâche....

On commence par modéliser la situation par un arbre pondéré :



$$\begin{aligned} P(\text{R}) &= P(\text{A} \cap \text{R}) + P(\text{B} \cap \text{R}) \\ &= P(\text{A}) \times P_{\text{A}}(\text{R}) + P(\text{B}) \times P_{\text{B}}(\text{R}) \\ &= \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Déjà là

On remarque que $P(R) = P_A(R)$. Donc A et R sont indépendants.

De plus $P(\text{A} \cap \text{R}) = P(\text{A}) \times P_{\text{A}}(\text{R}) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$.
Or $P(\text{A}) \times P(\text{R}) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9} = P(\text{A} \cap \text{R})$.
On en déduit que les évènements A et R sont indépendants.

Exercice 2

On commence par noter les évènements :

M_1 : « le premier moteur tombe en panne » ;
M_2 : « le second moteur tombe en panne » ;

L'avion se crashe lorsque les deux moteurs tombent en panne en même temps c'est à dire quand l'évènement $\text{M}_1 \cap \text{M}_2$ est réalisé :

$$\begin{aligned} P(\text{M}_1 \cap \text{M}_1) &= P(\text{M}_1) \times P(\text{M}_1) \\ &= 0,002 \times 0,002 \\ &= 0,000004 \end{aligned}$$

La probabilité que l'avion arrive à bon port est donc égale à :

$$P(\overline{\text{M}_1 \cap \text{M}_2}) = 1 - P(\text{M}_1 \cap \text{M}_2) = 1 - 0,000004 = 0,999996$$

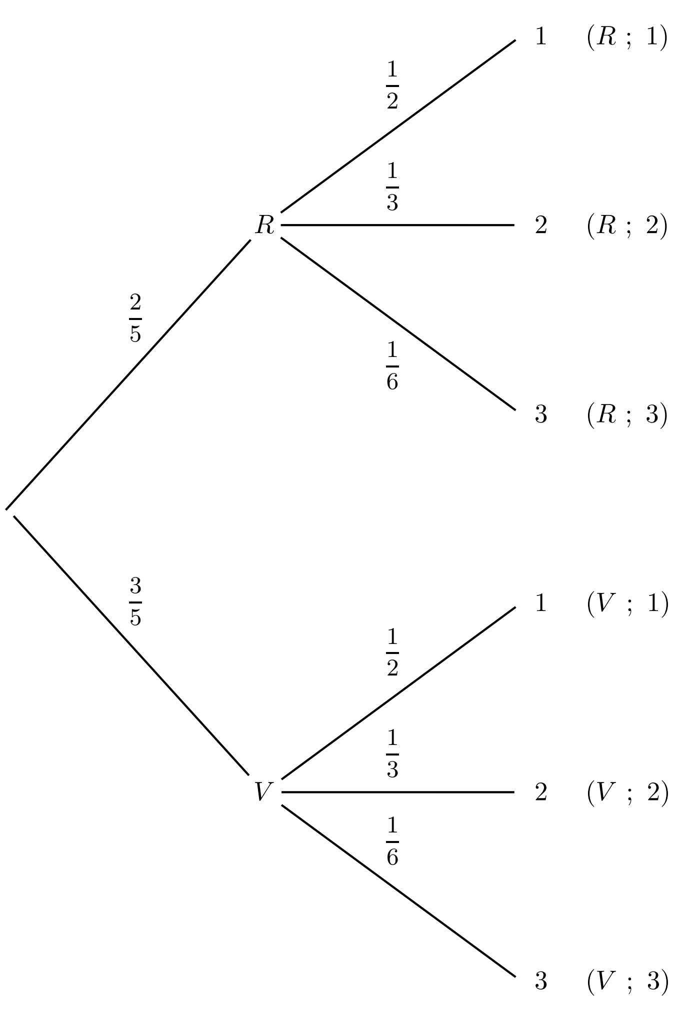
Exercice 3

$$\begin{aligned} P(\overline{\text{A}} \cap \text{B}) &= P(\text{B}) - P(\text{A} \cap \text{B}) && \text{Faites un diagramme pour établir cette égalité.} \\ &= P(\text{B}) - P(\text{A}) \times P(\text{B}) && \text{Car les évènements A et B sont indépendants} \\ &= (1 - P(\text{A})) \times P(\text{B}) && \text{On factorise.} \\ &= P(\overline{\text{A}}) \times P(\text{B}) \end{aligned}$$

Ainsi, $P(\overline{\text{A}} \cap \text{B}) = P(\overline{\text{A}}) \times P(\text{B})$ ce qui prouve que les événements $\overline{\text{A}}$ et B sont indépendants.

Exercice 4

Arbre complété :



$p(R\ ;\ 1) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$

$p(R\ ;\ 2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$

$p(R\ ;\ 3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{15}$

$p(V\ ;\ 1) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

$p(V\ ;\ 2) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{15}$

$p(V\ ;\ 3) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{10}$

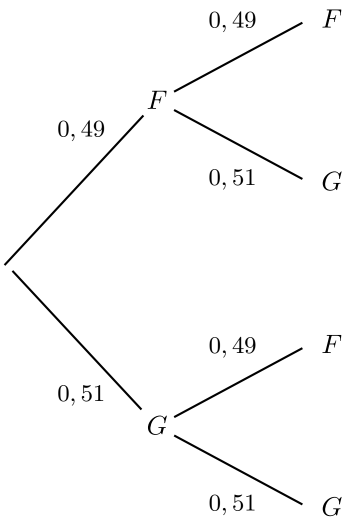
Tableau complété :

Jeton \ Dé	1	2	3	Total
R	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{5}$
V	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$
Total	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

Exercice 5

1. Si on note F l'événement "l'enfant est une fille" et G l'événement "l'enfant est un garçon", on a $P(F) = 0,49$ et $P(G) = 0,51$.

On représente la situation par un arbre pondéré :



$(F\ ;\ F)$ $\qquad p(F\ ;\ F) = 0,49 \times 0,49 = 0,2401$

$(F\ ;\ G)$ $\qquad p(F\ ;\ G) = 0,49 \times 0,51 = 0,2499$

$(G\ ;\ F)$ $\qquad p(G\ ;\ F) = 0,51 \times 0,49 = 0,2499$

$(G\ ;\ G)$ $\qquad p(G\ ;\ G) = 0,51 \times 0,51 = 0,2601$

Pensez-y !
Du fait de l'indépendance, les probabilités sur les branches du 1er et 2nd niveau sont les mêmes.

On représente la situation avec un tableau de probabilités :

2nd enfant / 1er enfant	F	G	Total
F	0,2401	0,2499	0,49
G	0,2499	0,2601	0,51
Total	0,49	0,51	1

2. L'événement "dans la famille il y a un enfant de chaque sexe " est constitué des deux issues $(F\ ;\ G)$ et $(G\ ;\ F)$. La probabilité est donnée est donnée par la somme des probabilités de ces deux issues, soit :

$$p(F\ ;\ G) + p(G\ ;\ F) = 0,2499 + 0,2499 = 0,4998$$