MATHEMATIQUES
Produit scalaire : sujet entraînement 1 (corrigé)

Exercice 1

1. On utilise la relation de Chasles.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{BC}}_{=\overrightarrow{AD}} \quad \text{Relation de Chasles.}\\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

Conseils

Aidez-vous de la figure. Cela paraît presque évident en la regardant :-)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \quad \text{Relation de Chasles.}\\ &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

2. Calcul de $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})\\ &= -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}_{\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \text{ donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0} + \overrightarrow{AD}^2\\ &= -\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2\\ &= -36 + 16\\ &= -20\end{aligned}$$

Explications

L'idée est simplifier l'écriture développée avec des produits scalaires nuls. Ici, par exemple, comme $ABCD$ est un rectangle, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux et donc le produit scalaire est nul.

Exercice 2

Explications

Même si l'énoncé n'est pas très explicite, les deux méthodes pour calculer le produit scalaire sont avec les coordonnées et avec la trigonométrie (formule avec le cosinus). En effet, le but de l'exercice est de calculer un angle.... il faut donc utiliser une formule utilisant cet angle. Cela paraît logique.

1. • On commence par calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ pour calculer ensuite le produit scalaire $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Pensez-y !

Les coordonnées des vecteurs peuvent se lire graphiquement.

$$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}6-2\\0-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}0-2\\8-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = xx' + yy' = 4 \times (-2) + (-2) \times 6 = -20$.

• On utilise la formule : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{CA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CB}$

Ainsi, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \underbrace{\|\overrightarrow{CA}\|}_{=CA} \times \underbrace{\|\overrightarrow{CB}\|}_{=CB} \times \cos(\widehat{ACB})$.

Pour utiliser cette formule, il faut calculer CA et CB :

$CA = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$.
$CB = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}$.

A savoir

Pour calculer la norme d'un vecteur dans un repère orthonormé, on utilise la formule :

$$CA = \sqrt{x^2_{\overrightarrow{CA}} + y^2_{\overrightarrow{CA}}}$$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = CA \times CB \times \cos(\widehat{ACB}) = \sqrt{20} \times \underbrace{\sqrt{40}}_{=2\sqrt{20}} \times \cos(\widehat{ACB}) = 20\sqrt{2}\cos(\widehat{ACB})$.

2. On obtient donc deux égalités du produit scalaire $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 20\sqrt{2}\cos(\widehat{ACB}) \\ \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = -20 \end{array}\right\} \text{ Ainsi, } 20\sqrt{2}\cos(\widehat{ACB}) = -20.$$

$$\begin{aligned} 20\sqrt{2}\cos(\widehat{ACB}) &= -20 \\ \cos(\widehat{ACB}) &= \frac{-20}{20\sqrt{2}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

A reconnaître

On trouve une valeur remarquable pour le cosinus : $\frac{-\sqrt{2}}{2}$.

On en déduit $\widehat{ACB} = \frac{3\pi}{4}$.

Exercice 3

1. Soit H' le projeté orthogonal de A sur (BC).

Le point H' est le milieu de $[BC]$ car ABC est un triangle isocèle en A.

Explication

Dans un premier temps, on est tenté d'utiliser la projection de C sur (AB). Mais cela ne mène pas au résultat. En fait, on a $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BH}$, mais on ne peut pas calculer BH.

On en déduit que $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \underbrace{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH'}}_{\substack{\text{Les vecteurs} \\ \text{sont colinéaires} \\ \text{de même sens}}} = 2 \times 4 = 8$.

2. Calcul de BH et HC.

Explications

Il faut calculer BH. On voit que le projeté orthogonal de C sur (AB), c'est justement H. La première question doit vous amener à penser à calculer d'une autre façon le produit scalaire $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$ en faisant intervenir la longueur BH.

H est le projeté orthogonal de C sur (AB), donc :

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \underbrace{\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BA}}_{\substack{\text{Les vecteurs} \\ \text{sont colinéaires} \\ \text{de même sens}}} = BH \times BA = 6BH$

Par conséquent, $6BH = 8$ soit $BH = \frac{4}{3}$.

On calcule HC grâce au théorème de Pythagore dans le triangle rectangle BHC.

$$\begin{aligned}
HC^2 + HB^2 &= BC^2 \\
HC^2 &= BC^2 - HB^2 \\
HC^2 &= 16 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 \\
HC &= \sqrt{16 - \left(\frac{4}{3}\right)^2} \\
HC &= \frac{8\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

Exercice 4

1. a. Les longueurs CI et CA se calculent en utilisant le théorème de Pythagore.

- Dans le triangle DCI rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}
CI^2 &= ID^2 + DC^2 \\
CI^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 \\
CI^2 &= \frac{a^2}{4} + a^2 \\
CI^2 &= \frac{a^2}{4} + \frac{4a^2}{4} \quad \text{Mise au même dénominateur.} \\
CI^2 &= \frac{5a^2}{4} \\
CI &= \sqrt{\frac{5a^2}{4}} \\
CI &= \frac{a\sqrt{5}}{2} \quad \text{Car } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ et } \sqrt{a^2} = a.
\end{aligned}$$

- Dans le triangle ABC rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}
CA^2 &= AB^2 + BC^2 \\
CA^2 &= a^2 + +a^2 \\
CA^2 &= 2a^2 \\
CA &= \sqrt{2a^2} \\
CA &= a\sqrt{2}
\end{aligned}$$

A connaître en 1S

La diagonale d'un carré de côté a est donnée par $a\sqrt{2}$.

b. On utilise la formule : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{CI}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CA}$

Ainsi, $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CA} = \underbrace{\|\overrightarrow{CI}\|}_{=CI} \times \underbrace{\|\overrightarrow{CA}\|}_{=CA} \times \cos(\widehat{ACI})$.

On obtient donc : $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \times a\sqrt{2} \times \cos\theta = \frac{a^2\sqrt{10}}{2} \cos\theta$.

2. a. Expression de $\overrightarrow{CI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CB}$.
On utilise la relation de Chasles.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CI} &= \overrightarrow{CD} + \underbrace{\overrightarrow{DI}}_{=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}} \quad \text{Relation de Chasles.} \\
&= \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}
\end{aligned}$$

Conseils

Encore une fois, regardez la figure !

b. Expression de $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CA}$ en fonction de a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CA} &= \left(\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)\cdot\overrightarrow{CA}\\
&= \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}\\
&= \underbrace{\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CD}}_{\substack{\text{Le projeté}\\\text{orthogonal de A}\\\text{sur (CD) est D}}}+\frac{1}{2}\underbrace{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CB}}_{\substack{\text{Le projeté}\\\text{orthogonal de A}\\\text{sur (CB) est B}}}\\
&= \overrightarrow{CD}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}^2\\
&= a^2+\frac{1}{2}a^2\\
&= \frac{3}{2}a^2
\end{aligned}$$

3. On obtient donc deux égalités du produit scalaire $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CA}$:

$$\left.\begin{array}{l}
\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CA}=\dfrac{a^2\sqrt{10}}{2}\cos\theta\\
\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CA}=\dfrac{3}{2}a^2
\end{array}\right\}\quad \text{Ainsi, } \frac{a^2\sqrt{10}}{2}\cos\theta=\frac{3}{2}a^2.$$

$$\begin{aligned}
\frac{a^2\sqrt{10}}{2}\cos\theta &= \frac{3}{2}a^2\\
a^2\sqrt{10}\cos\theta &= 3a^2 \quad \text{En multipliant par 2 les deux membres.}\\
\cos\theta &= \frac{3\cancel{a^2}}{\cancel{a^2}\sqrt{10}}\\
&= \frac{3}{\sqrt{10}}
\end{aligned}$$

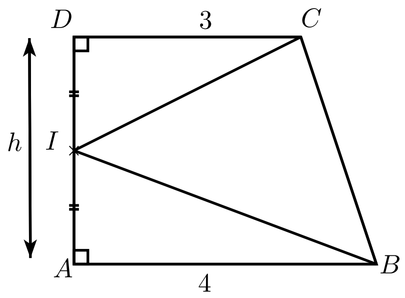
On en déduit que l'angle θ est indépendant de la valeur de a et $\theta=\cos^{-1}\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)\simeq 18,4°$

Exercice 5

Explications

Pour résoudre ce problème, il est important d'avoir acquis des automatismes. En effet, la première question est assez classique, mais elle n'est pas guidée. Pour exprimer exprimer $\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}$, vous devez utiliser la relation de Chasles et écrire "différemment" les vecteurs $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IC}$, puis en développant vous devez arriver au résultat attendu.

Voici la figure de l'exercice :



1. • On exprime le vecteur $\overrightarrow{IB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{AB}$:

$\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}$.

• On exprime le vecteur $\overrightarrow{IC}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{DC}$:

$\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DC}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} &= (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DC}) \\
&= \overrightarrow{IA} \cdot \underbrace{\overrightarrow{ID}}_{=-\overrightarrow{IA}} + \underbrace{\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{DC}}_{\substack{\overrightarrow{IA} \perp \overrightarrow{DC} \text{ donc} \\ \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{DC} = 0}} + \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ID}}_{\substack{\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{ID} \text{ donc} \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ID} = 0}} + \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}}_{\substack{\text{Les vecteurs} \\ \text{sont colinéaires} \\ \text{de même sens}}} \\
&= -\overrightarrow{IA}^2 + AB \times DC \\
&= -IA^2 + AB \times DC \\
&= -\left(\frac{h}{2}\right)^2 + 4 \times 3 \\
&= -\frac{h^2}{4} + 12
\end{aligned}$$

2. IBC est rectangle en I si et seulement si $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} = 0$.

$$\begin{array}{rcl}
\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} & = & 0 \\
-\dfrac{h^2}{4} + 12 & = & 0 \\
-\dfrac{h^2}{4} & = & -12 \\
h^2 & = & 48 \\
h = -\sqrt{48} & \text{ou} & h = \sqrt{48}
\end{array}$$

Or $h > 0$, donc il existe une valeur de h pour laquelle le triangle IBC est rectangle en I, c'est $h = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.