MATHEMATIQUES
Produit scalaire : sujet entraînement 2

Exercice 1

1. On utilise les propriétés du produit scalaire.

$$\begin{array}{rcl}\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) & = & \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}\\ & = & \vec{u}^2+\vec{u}\cdot\vec{v}\\ & = & \|\vec{u}\|^2+\vec{u}\cdot\vec{v}\\ & = & 3^2+12\\ & = & 21\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}2\vec{u}\cdot(-3\vec{v}) & = & -6\vec{u}\cdot\vec{v}\\ & = & -6\times 12\\ & = & -72\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}(\vec{u}+\vec{v})^2 & = & \vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2\\ & = & \vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2\\ & = & \|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2\\ & = & 3^2+2\times 12+5^2\\ & = & 58\end{array}$$

2. On développe :

$$\begin{array}{rcl}(\vec{u}-\vec{v})^2 & = & \vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2\\ & = & \vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2\\ & = & \|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2\\ & = & 2^2-2\times(-4)+3^2\\ & = & 21\end{array}$$

Or, $(\vec{u}-\vec{v})^2=\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$.

Par conséquent, $\|\vec{u}-\vec{v}\|=\sqrt{21}$.

Exercice 2

1. • Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :
$\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-4\\ 5-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ 4\end{pmatrix}$

• Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées :
$\begin{pmatrix}x_C-x_A\\ y_C-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-4\\ -1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\ -2\end{pmatrix}$

Ainsi, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-4)\times(-6)+4\times(-2)=16$.

2. On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.

$AB = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{32}$ et $AC = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{40}$.

Petit rappel

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \sqrt{32} \times \sqrt{40} \times \cos \widehat{BAC} = 16\sqrt{5} \cos \widehat{BAC}$.

Conseil

Utilisez la calculatrice pour simplifier $\sqrt{32} \times \sqrt{40}$. C'est bien plus rapide :-)

Comme $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16\sqrt{5} \cos \widehat{BAC}$, on en déduit :

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{16}{16\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

3. En utilisant une calculatrice, on trouve : $\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \simeq 63^\circ$.

Exercice 3

1. a. Calcul de $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

Soit M un point quelconque du plan.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\
&= \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \\
&= MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA})}_{\vec{0}} + \overrightarrow{IA} \cdot (-\overrightarrow{IA}) \\
&= MI^2 - IA^2
\end{aligned}$$

b. Ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$.

Soit M un point quelconque du plan.

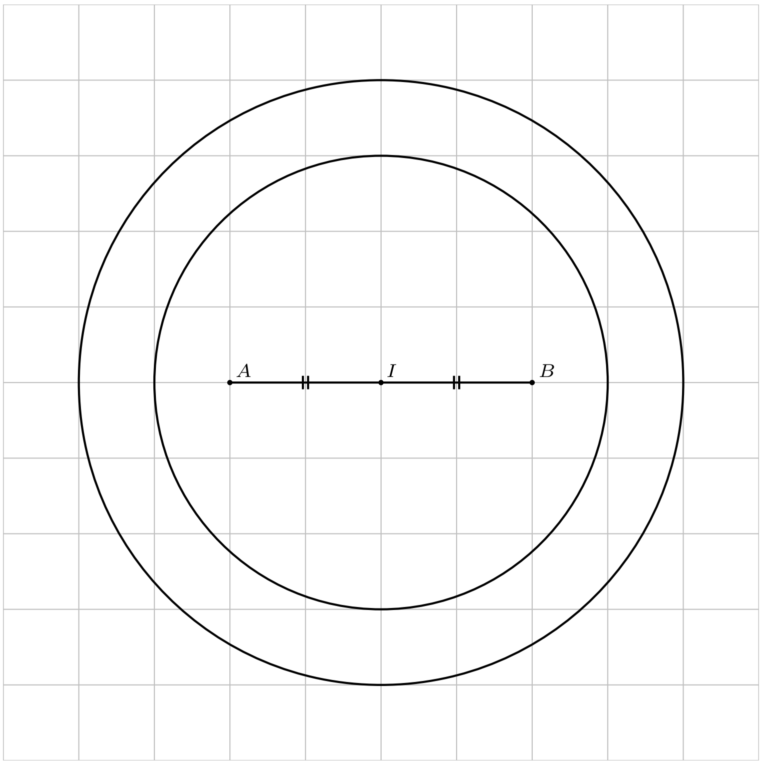
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5 &\iff MI^2 - IA^2 = 5 \\
&\iff MI^2 = 5 + 2^2 \quad \text{car } IA = \frac{AB}{2} = 2 \\
&\iff MI = 3 \quad \text{car } MI \geqslant 0 \\
&\iff M \text{ appartient au cercle de centre } I \text{ et de rayon } 3
\end{aligned}$$

2. a. Soit M un point quelconque du plan.

$$\begin{aligned}
MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 \\
&= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\
&= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 \\
&= 2MI^2 + 2(\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB}) + IA^2 + IB^2 \\
&= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})}_{\vec{0}} + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \\
&= 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}
\end{aligned}$$

b. Ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 20$.

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 = 20 &\iff 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 20 \\ &\iff 2MI^2 = 40 - \frac{4^2}{2} \\ &\iff MI^2 = 16 \\ &\iff MI = 4 \quad \text{car } MI \geqslant 0 \\ &\iff M \text{ appartient au cercle de centre } I \text{ et de rayon } 4 \end{aligned}$$



Exercice 4

1. D'après le théorème d'Al-Kashi :

$$\begin{aligned} \mathrm{BC}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \cos(60^\circ) \\ &= 8^2 + 3^2 - 2 \times 8 \times 3 \times 0{,}5 \\ &= 64 + 9 - 24 \\ &= 49 \end{aligned}$$

On obtient $\mathrm{BC} = 7$.

2. De même : $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\mathrm{AC} \times \mathrm{BC} \cos\left(\widehat{\mathrm{ACB}}\right)$

Donc

$\cos\left(\widehat{\mathrm{ACB}}\right) = \dfrac{\mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\mathrm{AC} \times \mathrm{BC}} = \dfrac{3^2 + 7^2 - 64}{2 \times 3 \times 7} = -\dfrac{6}{42} = -\dfrac{1}{7}$.

On obtient ainsi, avec la calculatrice : $\widehat{\mathrm{ACB}} \simeq 98^\circ$.