MATHEMATIQUES
Produit scalaire : sujet entraînement 3 (corrigé)

Exercice 1

1. D'après la formule du cours, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$.

On applique avec $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$.
On obtient : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\|^2-\|\overrightarrow{AB}\|^2-\|\overrightarrow{BC}\|^2\right)$.

A vous.
C'est à vous de "voir" la formule à utiliser compte tenu des données.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} &= \frac{1}{2}\left(\|\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}}_{=\overrightarrow{AC}}\|^2-\|\overrightarrow{AB}\|^2-\|\overrightarrow{BC}\|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{AB}\|^2-\|\overrightarrow{BC}\|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(4^2-8^2-6^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\times(-84)\\
&= -42
\end{aligned}$$

Réponse : b.

2. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\cdot(-\overrightarrow{CB})=-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$.

Explications
On utilise la propriété : $(-\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(-\vec{v})=-\vec{u}\cdot\vec{v}$.
Les propositions a. et b. ne peuvent pas être exactes car pour qu'elles le soient il aurait fallu que les points A, B et C soient alignés (et donc que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ soient colinéaires) .... et ils ne le sont pas (regardez les longueurs données !)

Réponse : d.

3. On développe :

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}) &= \overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}^2\\
&= \overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2\\
&= AB^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+BC^2
\end{aligned}$$

Explications
On développe en n'oubliant pas que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2=AB^2$. C'est le carré scalaire.
N'écrivez pas de signe $\times$ entre deux vecteurs sous peine de .... sanctions de la part de votre professeur !

D'autre part, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
Ainsi, $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}^2=AC^2$.

Réponse : a.

4. $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux,
c'est-à-dire que les droites (CM) et (AB) sont perpendiculaires,
c'est-à-dire que M est sur la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

Essentiel
C'est très important de savoir interpréter un produit scalaire nul.

Réponse : b.

Exercice 2

1. • On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 7-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

• On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$:

$$\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-(-8) \\ 4-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

• On calcule le produit scalaire avec les coordonnées :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 3 \times 8 + 4 \times (-6) = 0.$

Réponse : b.

2. Puisque le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ est nul, on en déduit que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires (et donc sécantes aussi, évidemment).

Réponse : a. et c.

Exercice 3

1. On utilise la projection orthogonale :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AE} \quad \text{Car le point } H \text{ est le projeté orthogonal du point } E \text{ sur } (AB).\\
&= AI \times AH \quad \text{Car les vecteurs } \overrightarrow{AI} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont colinéaires de même sens.}\\
&= 2 \times 1\\
&= 2
\end{aligned}$$

Réponse : a. et c.

2. On utilise encore la projection orthogonale :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GF} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IA} \quad \text{Car les points } I \text{ et } A \text{ sont les projetés orthogonaux des points } G \text{ et } F \text{ sur } (AB).\\
&= -AB \times IA \quad \text{Car les vecteurs } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{IA} \text{ sont colinéaires de sens contraires.}\\
&= -3 \times 2\\
&= -6
\end{aligned}$$

Réponse : c. et d.

Remarque
En fait, c'est deux fois la même réponse car $IA = AI$. Ce sont des longueurs.

3. On veut le cosinus de l'angle $\widehat{EAB}$.

Cela nous incite à calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Explication

En fait, ce produit scalaire fait intervenir le cosinus qui nous intéresse.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} &= AE \times AB \times \cos(\widehat{EAB}) \\ \cos(\widehat{EAB}) &= \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}}{AE \times AB} \end{aligned}$$

Il nous faut calculer la longueur AE. Pour cela, on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ADE.

$$\begin{aligned} AD^2 + DE^2 &= AE^2 \\ AE^2 &= 3^2 + 1^2 \\ AE &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

Il nous faut calculer aussi $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AE} && \text{Car le point } H \text{ est le projeté orthogonal du point } E \text{ sur } (AB). \\ &= AH \times AB && \text{Car les vecteurs } \overrightarrow{AH} \text{ et } \overrightarrow{AE} \text{ sont colinéaires de même sens.} \\ &= 1 \times 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Ainsi, $\cos(\widehat{EAB}) = \dfrac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}}{AE \times AB} = \dfrac{3}{3 \times \sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Réponse : a. et c.

4. Dans ce repère,

Le point B a pour coordonnées $(3\ ;\ 0)$.
Le point E a pour coordonnées $(1\ ;\ 3)$.
Le point I a pour coordonnées $(2\ ;\ 0)$.
Le point C a pour coordonnées $(3\ ;\ 3)$.

Petite remarque

On remarque tout d'abord que le repère proposé est bien orthonormé. En effet $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{AF}$ et $\|\overrightarrow{AH}\| = \|\overrightarrow{AF}\| = 1$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BE}$ sont : $\begin{pmatrix} 1-3 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IC}$ sont : $\begin{pmatrix} 3-2 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ainsi, $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{IC} = -2 \times 1 + 3 \times 3 = 7$.

Réponse : b.