MATHEMATIQUES
Produit scalaire : entraînement savoir-faire (corrigé)

Exercice 1

Dans cet exercice, on utilise la formule : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

1. Première figure :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= 4 \times 3 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 12 \times 0{,}5 \\ &= 6\end{aligned}$$

Trigo

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0,5.$

Deuxième figure :

On obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) \\ &= \cancel{AB} \times AC \times \frac{AC}{\cancel{AB}} \\ &= \mathrm{AC}^2 \\ &= 6^2 = 36\end{aligned}$$

Trigo

Dans le triangle ABC rectangle en C :

$\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{\text{Côté adjacent à } \widehat{BAC}}{\text{Hypoténuse}} = \dfrac{AC}{AB}.$

2. On exprime d'abord ce produit scalaire en fonction de représentants des vecteurs de même origine A.
En effet, on sait que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, il en résulte donc que :
$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = AD \times AC \times \cos\left(\widehat{DAC}\right)$.

Comme, de plus, $AD = 3$, $AC = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ et $\cos\left(\widehat{DAC}\right) = \cos(45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, on en déduit que :

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}^2}{2} = 9.$$

Exercice 2

1. • Avec le carré de côté 4 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} && \text{Car le projeté orthogonal de } C \text{ sur } (AB) \text{ est } O. \\ &= -AB \times AO && \text{Car } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AO} \text{ sont colinéaires de sens contraires.} \\ &= -2 \times 2 = -4\end{aligned}$$

• Avec le triangle isocèle :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} && \text{Car le projeté orthogonal de } C \text{ sur } (AB) \text{ est } H. \\ &= AB \times AH && \text{Car } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont colinéaires de même sens .} \\ &= 2 \times 1 = 2\end{aligned}$$

- Avec le quadrillage :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ Car le projeté orthogonal de C sur (AB) est D.

$= AB \times AD$ Car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires de même sens .
$= 5 \times 2 = 10$

2. • B est le projeté orthogonal de C sur (AB) donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = 2^2 = 4.$$

- $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC}$ et B est le projeté orthogonal de C sur (IA) donc :

$$\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -IA \times IB = -1^2 = -1.$$

Exercice 3

1. • Par lecture graphique $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times 3 + 3 \times (-1) = 12$.

- Par lecture graphique $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4 \times 2 + 3 \times 1 = -5$.

2. • On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1-(-2)\\2-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

- On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{pmatrix}x_C - x_A\\y_C - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-(-2)\\1-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$$

- On calcule les produits scalaires avec les coordonnées :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 6 + 1 \times 0 = 6$.

$\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.

Carré scalaire

$\overrightarrow{AB}^2$ est le carré scalaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
$\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$.

Exercice 4

On a :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right\|^2}_{=\|\overrightarrow{BC}\|^2} - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(BC^2 - BA^2 - AC^2\right) = \frac{1}{2}\left(8^2 - 6^2 - 5^2\right) = \frac{3}{2}.$$

La formule

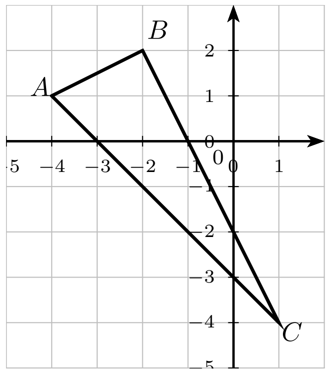
On utilise l'égalité

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

avec $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Exercice 5

1. Une petite figure s'impose.
Le triangle semble rectangle en B.
On commence par calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ pour calculer ensuite le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.



$$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} -4-(-2) \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1-(-2) \\ -4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

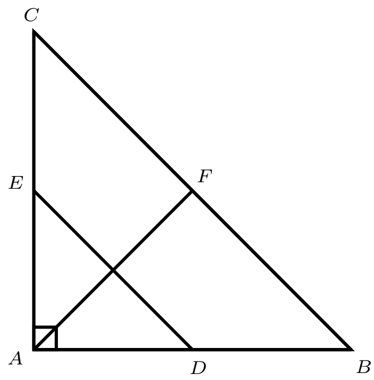
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -2 \times 3 + (-1) \times (-6) = -6 + 6 = 0.$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux et par suite que le triangle ABC est rectangle en B.

2. Une petite figure pour voir ce qui se passe.

Dans le repère $\left(A\ ;\ \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\ ,\ \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right)$:

- $A(0\ ;\ 0)$.
- $F(3\ ;\ 3)$.
- $E(0\ ;\ 3)$.
- $D(3\ ;\ 0)$.



$$\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} 3-0 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{ED}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{ED} = 3 \times 3 + 3 \times (-3) = 0.$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont orthogonaux et par suite que les droites (AF) et (ED) sont perpendiculaires.

Autre méthode pour montrer que (ED) et (AF) sont perpendiculaires

Comme E et D sont les milieux de $[AC]$ et $[AB]$, d'après la droite des milieux, $(ED)//(BC)$.
Or, $(AF) \perp (BC)$ car dans un triangle isocèle, la médiane issue du sommet principal est aussi la hauteur.
Si deux droites sont parallèles ($(ED)//(BC)$), alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. Par conséquent, $(AF) \perp (ED)$.

Exercice 6

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc :

— $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 2 + 1 \times 4 = 14$
— $AB = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$
— $AC = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Les formules utilisées

- Si $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$, alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.
- Si $\vec{u}(x\ ;\ y)$ et $\vec{v}(x'\ ;\ y')$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.
- Si $\vec{u}(x\ ;\ y)$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

2. De $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$, on déduit que $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \dfrac{14}{\sqrt{26} \times 2\sqrt{5}} = \dfrac{7}{\sqrt{130}}$.

La calculatrice donne $\widehat{BAC} \approx 52{,}1\,^\circ$.

Exercice 7

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{ID} &= \left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AD}\right)\\ &= \overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}\\ &= -IA\times IB+0+0+BC\times AD\\ &= -4\times4+10\times10\\ &= 84\end{aligned}$$

- $\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$ car $\overrightarrow{IB}\perp\overrightarrow{AD}$;
- $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{IA}=0$ car $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{IA}$;
- $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=-IA\times IB$ car les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont colinéaires et de sens contraire.
- $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=BC\times AD$ car les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires et de même sens.

Avec un repère

On peut choisir le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}\ ,\frac{1}{10}\overrightarrow{AD}\right)$ car $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$ et $\left\|\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}\right\|=\frac{1}{8}\times AB=1$ et $\left\|\frac{1}{10}\overrightarrow{AD}\right\|=\frac{1}{10}\times AD=1$.
Dans ce repère, on a $A(0\ ;\ 0)$, $B(8\ ;\ 0)$, $I\,(4\ ;\ 0)$, $C(8\ ;\ 10)$ et $D(0\ ;\ 10)$.
On obtient alors $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}4\\10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix}-4\\10\end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{ID}=4\times-4+10\times10=84$.

$\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{ID}=IC\times ID\times\cos(\theta)$.
On détermine la longueur du segment $[IC]$ à l'aide du théorème de Pythagore appliqué dans le triangle IDA :

$$ID^2=AI^2+AD^2=4^2+10^2=116$$

et comme $ID=IC$, on obtient $IC=ID=\sqrt{116}$.

On obtient ainsi :

$$\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{ID}=\sqrt{116}\times\sqrt{116}\times\cos(\theta)=116\cos(\theta)$$

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{ID}&=84\\ \overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{ID}&=116\cos(\theta)\end{aligned}\right\}\ \text{Ainsi, } 116\cos(\theta)=84$$

Par conséquent, $\cos(\theta)=\dfrac{84}{116}$ d'où $\theta\simeq44°$.