MATHEMATIQUES
Exercice sur le second degré : corrigé

Pourcentages d'évolution

Même si cette notion n'est pas souvent travaillée en seconde, vous devez avoir des restes du collège. Notons x la quantité que l'on veut diminuer de t %.

$$\underbrace{x - t\% \text{ de } x}_{x \text{ diminué de } t\% \text{ de } x} = x - \frac{t}{100} \times x = x \times 1 - x \times \frac{t}{100} \underbrace{=}_{\substack{\text{On}\\ \text{factorise}\\ \text{par } x}} x\left(1 - \frac{t}{100}\right).$$

Donc diminuer une quantité de t % revient bien à la multiplier par $1 - \dfrac{t}{100}$.

1. a. La robe coûte au départ 35 €.

On lui applique une réduction de 35 % conformément à la publicité.
Diminuer une quantité de 35 % revient à la multiplier par :

$$1 - \frac{35}{100} = 1 - 0,35 = 0,65$$

$35 \times 0,65 = 22,75$.
On retrouve bien le résultat annoncé. Ouf !

Remarque
Même si l'affiche peut porter à confusion, le prix de la robe ne peut-être que 35 €. En effet, d'après la question le prix après réduction est de 22,75 €, donc supérieur au deuxième prix de l'affiche (22 €).

b. Le prix du top est 22 €. On lui applique une réduction de 22 %.
Diminuer une quantité de 22 % revient à la multiplier par :

$$1 - \frac{22}{100} = 1 - 0,22 = 0,78$$

$22 \times 0,78 = 17,16$.
Le prix du top après réduction est 17,16 €.

c. Pour un prix de 100 €, le pourcentage de réduction serait de 100 %. Le prix payé serait alors 0 €. Ah.... si seulement il n'y avait pas ces petites lignes ....

d. Les petites lignes nous indique que la réduction est de 50 % pour un prix supérieur à 50€.
Ainsi pour un article de 100 €, le prix payé après réduction est 50 €.

Remarque
Prendre 50 % d'un nombre c'est prendre la moitié de ce nombre.

2. a. Expression de $f(x)$.

$$f(x) = \underbrace{x - x\% \text{ de } x}_{x \text{ diminué de } x\% \text{ de } x} = x - \frac{x}{100} \times x = x - \frac{x^2}{100}.$$

Autre écriture
On peut écrire $f(x)$ autrement :

$$f(x) = x - 0,01x^2$$

Vous avez le choix !

b. Forme canonique de $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \frac{x^2}{100} \quad \text{On commence par mettre le coefficient devant } x^2 \text{ en facteur.} \\ &= -\frac{1}{100}(x^2 - 100x) \\ &= -\frac{1}{100}((x-50)^2 - 2500) \\ &= -\frac{1}{100}(x-50)^2 + 25 \end{aligned}$$

f est une fonction polynôme du second degré.
$a > 0$, donc f est d'abord décroissante, puis croissante.
La forme canonique permet de donner les coordonnées du sommet de la parabole : $(50\ ;\ 25)$.

On en déduit le tableau de variations :

x	0		50		100
$f(x)$	0	$\nearrow$	25	$\searrow$	0

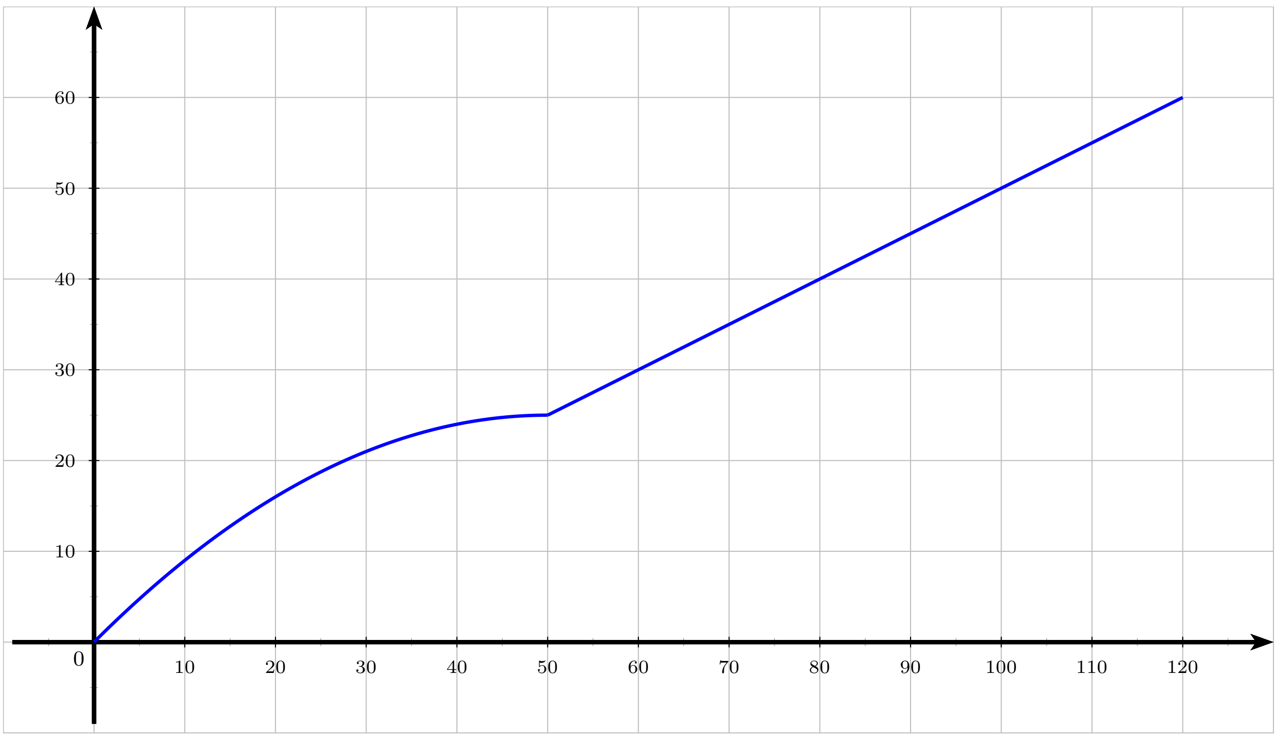
c. Par exemple pour un prix de 100 €, le prix soldé serait de 0 €..... embêtant pour la boutique. Imaginez si le prix de départ était de 120 €....
Donc le magasin est obligé d'imposer une valeur limite au-delà de laquelle la promotion n'est plus appliquée.

d. La formule donnée à la question **a.** est valable jusqu'à un prix de 50 €. Cela signifie que la réduction maximale sur un article est de 50 %.
Au delà de 50 €, la réduction est de 50 %. Diminuer une quantité de 50 % revient à la multiplier par 0,5.
Ainsi, $g(x) = 0,5x$.

3. **a.** Représentation graphique de la fonction h :

Fonction définie par morceaux

La fonction h est définie de deux façons différentes suivant les valeurs de x. Pour x compris entre 0 et 50, il s'agit d'une fonction polynôme du second degré (donc elle se représente par une parabole.... du moins un morceau de parabole ici) et pour $x \geqslant 50$ c'est une fonction affine (donc elle se représente par une droite). On remarque que les deux morceaux "coïncident" et donc qu'il n'y a pas de cassure dans la courbe. Cela caractérise des fonctions continues. Vous verrez cela en terminale. La fonction h est strictement croissante pour $x \geqslant 0$.



b. Le prix initial est supérieur à 50 €. On utilise donc la fonction f en cherchant la valeur de x telle que $0,5x = 55$, soit $x = 110$.
Le prix initial est de 110 €.

c. Le prix initial se situe entre 0 et 50 €. On utilise donc la fonction f en cherchant la valeur de x telle que $x - \dfrac{1}{100}x^2 = 14,11$, soit $-\dfrac{1}{100}x^2 + x - 14,11 = 0$.
On reconnaît une fonction polynôme du second degré avec $a = -0,01$, $b = 1$ et $c = -14,11$.
$\Delta = 1^2 - 4 \times (-0,001) \times (-14,11) = 0,4356 > 0$.

L'équation admet donc deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{0,4356}}{2 \times (-0,001)} = 17 \text{ et } x_1 = \frac{-1 - \sqrt{0,4356}}{2 \times (-0,001)} = 83$$

Lorsqu'un client paye 14 € 11, le prix initial est de 17 €.

Pourquoi ?

Et pourquoi pas 83 € ? Tout simplement parceque le prix initial doit se situer entre 0 et 50 € et donc la valeur 83 ne convient pas.

4. En prenant 60 € comme valeur limite :
Si un client prend un article qui coûte 60 €, sa réduction sera de 60 %.

$60 \times \underbrace{0,4}_{1-0,6} = 24$.

Il paiera donc l'article 24 €.

Le client paiera donc moins cher s'il achète un article à 60 €plutôt qu'un article à 50 € ($24 < 25$), ce qui serait incohérent.... et le problème se pose pour tous les prix compris entre 50 et 60 € (la fonction f est décroissante sur $[50~;~60]$).