MATHEMATIQUES
Second degré : sujet d'entraînement 1 (corrigé)

Exercice 1

1. Calcul de $f\left(-\dfrac{4}{3}\right)$.

$$\begin{aligned}
f\left(-\frac{4}{3}\right) &= 3\times\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 8\times\left(-\frac{4}{3}\right) - 16\\
&= 3\times\frac{16}{9} - \frac{32}{3} - 16\\
&= \frac{48}{9} - \frac{96}{9} - \frac{144}{9} \quad \text{Mise au même dénominateur.}\\
&= -\frac{192}{9}\\
&= -\frac{64}{3}
\end{aligned}$$

Conseil

Vous pouvez utiliser votre calculatrice pour vérifier votre calcul.

2. La fonction f est une fonction polynôme du second degré avec $a = 3$, $b = 8$ et $c = -16$.
Elle est donc décroissante puis croissante puisque $a > 0$.
$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{8}{2\times 3} = -\dfrac{4}{3}$.

On en déduit le tableau de variations sur $[-5\ ;\ 2]$:

x	-5	$-\frac{4}{3}$	2
$f(x)$	19 ↘	$-\frac{64}{3}$	↗ 12

- $f\left(-\dfrac{4}{3}\right) = -\dfrac{64}{3}$
- $f(-5) = 3\times(-5)^2 + 8\times(-5) - 16 = 19$.
- $f(2) = 3\times 2^2 + 8\times 2 - 16 = 12$.

3. a. Pour démontrer cette égalité, on développe l'expression $(3x-4)(x+4)$.

$$\begin{aligned}
(3x-4)(x+4) &= 3x^2 + 12x - 4x - 16\\
&= 3x^2 + 8x - 16\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Explications

Pour démontrer l' égalité $f(x) = (3x-4)(x+4)$, on est parti
membre de droite et on a développé pour retrouver le membre
gauche. Faites attention de ne pas écrire la conclusion au dépa
pour être plus clair, ne commencez pas en écrivant :
$f(x) = (3x-4)(x+4) = \ldots..$

Ainsi, pour tout réel x de $[-5\ ;\ 2]$, $f(x) = (3x-4)(x+4)$.

b. Points d'intersection entre la courbe et l'axe des abscisses.
Les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses sont donnés par les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

On prend la forme factorisée pour résoudre cette équation.

Évidemment

Si on ne prend pas la forme factorisée, on se retrouve avec une équation du second degré ($3x^2 + 8x + 16 = 0$) que l'on ne sait pas encore résoudre.... patience.... ça va venir.

$$\begin{array}{rcl} (3x-4)(x+4) & = & 0 \quad \text{C'est une équation produit nul.} \\ 3x-4=0 & \text{ou} & x+4=0 \\ 3x=4 & \text{ou} & x=-4 \\ x=\dfrac{4}{3} & \text{ou} & x=-4 \end{array}$$

La parabole $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses en $(-4~;~0)$ et $\left(\dfrac{4}{3}~;~0\right)$.

c. Résolution de l'inéquation.

On prend encore la forme factorisée.

Explications

Même si les solutions apparaissent sur le graphique donné, on attend ici une méthode algébrique.
Le graphique permettra de vérifier les solutions trouvées.

$3x - 4$ s'annule pour $x = \dfrac{4}{3}$ et $x + 4$ s'annule pour $x = -4$. On en déduit le tableau de signes :

x	-5		-4		$\frac{4}{3}$		2
Signe de $3x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$f(x)>0$ $f(x)>0$

$\mathscr{S} = [-5~;~-4[\cup \left]\dfrac{4}{3}~;~2\right]$.

Graphiquement, cela signifie que la parabole se situe au-dessus (ou sur) de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-5~;~-4[$ et sur $\left]\dfrac{4}{3}~;~2\right]$.

Exercice 2

1. a. Pour tout réel x de $[0~;~8]$, $f(x) = x^2$.

Explication

$f(x)$ donne l'aire d'un carré de côté x.

b. Pour tout réel x de $[0~;~8]$,
$g(x) = \dfrac{MB \times AF}{2} = \dfrac{(8-x)\times x}{2} = \dfrac{-x^2+8x}{2} = -0,5x^2 + 4x$.

Explication

$g(x)$ donne l'aire du triangle MBH. Sa base est $MB = 8 - x$ et sa hauteur est donnée par $AF = x$.

c. L'aire du motif est donnée par la somme des aires des deux polygones (le carré et le triangle).
Ainsi pour tout réel x de $[0~;~8]$, $h(x) = x^2 + (-0,5x^2 + 4x) = 0,5x^2 + 4x$.

2. a. La fonction g est une fonction polynôme du second degré avec $a = -0,5$, $b = 4$ et $c = 0$.
Elle est donc croissante puis décroissante puisque $a < 0$.
$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{2 \times (-0,5)} = 4$.

On en déduit le tableau de variations sur $[0\ ;\ 8]$:

x	0		4		8
$g(x)$	0	$\nearrow$	8	$\searrow$	0

- $g(0) = 0$
- $g(4) = -0,5 \times 4^2 + 4 \times 4 = 8$.
- $g(8) = -0,5 \times 8^2 + 4 \times 8 = 0$.

b. Tableau de valeurs complété :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$g(x)$	0	3,5	6	7,5	8	7,5	6	3,5	0

3. a. Les aires du triangle et du carré $AMEF$ sont égales lorsque $x \simeq 2,7$.

Explication

Les aires sont égales lorsque $f(x) = g(x)$. On lit l'abscisse du point d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. Voir les pointillés orange sur le graphique.

b. L'aire du triangle est plus grande que l'aire du carré quand $x \in]0\ ;\ 2,7[$.

Explication

L'aire du triangle est plus grande que l'aire du carré quand $g(x) > f(x)$. Les solutions sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_g$ qui se situent au dessus de ceux de $\mathscr{C}_f$).

c. Le motif a une aire égale à la moitié de celle du carré $ABCD$ lorsque $x \simeq 4,9$.

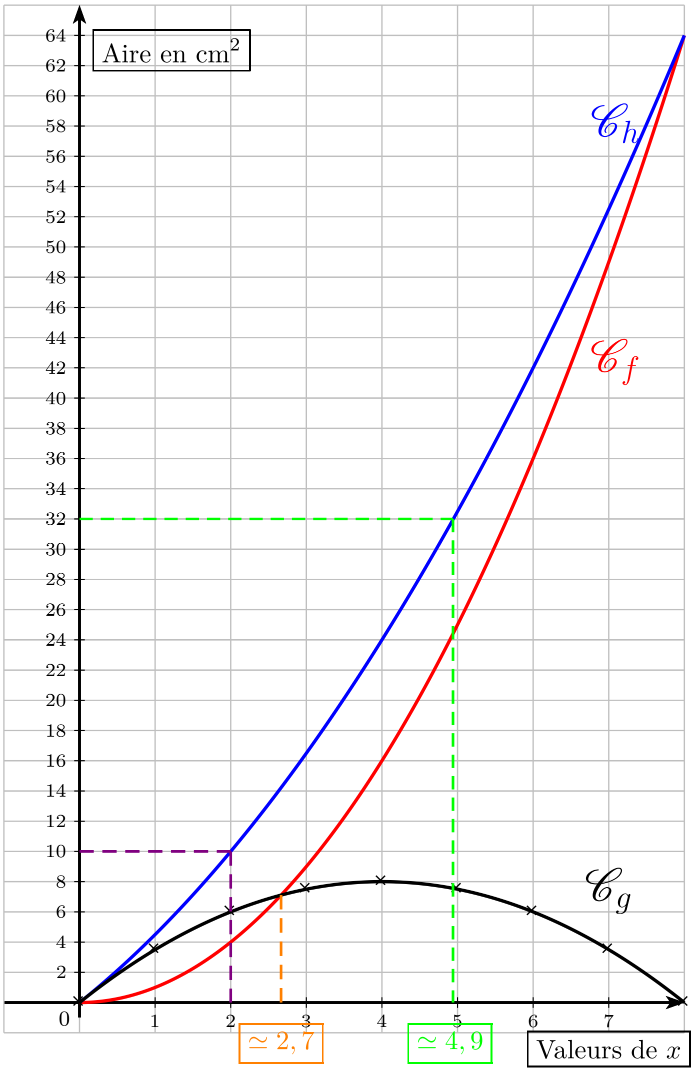
Explication

L'aire du carré $ABCD$ est 64 cm^2. La moitié de 64 est 32. On lit donc l'antécédent de 32 par h sur le graphique. Voir les pointillés verts).

d. Lorsque $x = 2$, le motif a une aire de : 10 cm^2.

Explication

On lit l'image de 2 par la fonction h. Voir pointillés violets.



4. La valeur exacte de x pour que l'aire du triangle soit égale à l'aire du carré $AMEF$ est donnée par la solution dans $]0\ ;\ 8]$ de l'équation $f(x) = g(x)$.

$$\begin{array}{rcll}
f(x) & = & g(x) & \\
x^2 & = & -0,5x^2 + 4x & \\
1,5x^2 - 4x & = & 0 & \\
x(1,5x - 4) & = & 0 & \text{On factorise par le facteur commun } x. \\
x = 0 & \text{ou} & 1,5x - 4 = 0 & \\
x = 0 & \text{ou} & x = \dfrac{4}{1,5} & \\
x = 0 & \text{ou} & x = \dfrac{8}{3} &
\end{array}$$

Explication

L'idée est de se ramener à une équation produit nul, d'où la factorisation par x.

La valeur exacte de x pour que l'aire du triangle soit égale à l'aire du carré $AMEF$ est $\dfrac{8}{3}$.

Exercice 3

1. Si $x = -2$.

- x prend la valeur $x + 3$. Donc x prend la valeur $-2 + 3 = 1$.
- x prend la valeur x^2. Donc x prend la valeur $1^2 = 1$.
- y prend la valeur $x - 4$. Donc y prend la valeur $1 - 4 = -3$.

La valeur affichée à l'écran est : -3.

2. Si $x = a$.

- x prend la valeur $x + 3$. Donc x prend la valeur $a + 3$.
- x prend la valeur x^2. Donc x prend la valeur $(a + 3)^2$.
- x prend la valeur $x - 4$. Donc x prend la valeur $(a + 3)^2 - 4$.

La valeur affichée à l'écran est : $(a + 3)^2 - 4$.

3. On cherche les valeurs de a de façon que $(a + 3)^2 - 4 = 0$.

$$\begin{array}{rcll}
\underbrace{(a+3)^2}_{a^2} - \underbrace{4}_{b^2} & = & 0 & \\
\underbrace{((a+3)-2)}_{(a-b)}\underbrace{((a+3)+2)}_{(a+b)} & = & 0 & \text{On factorise avec l'égalité remarquable } a^2 - b^2 = (a-b)(a+b). \\
(a+1)(a+5) & = & 0 & \text{On reconnaît une équation produit nul.} \\
a + 1 = 0 & \text{ou} & a + 5 = 0 & \\
a = -1 & \text{ou} & a = -5 &
\end{array}$$

Autres méthodes

• Pour résoudre l'équation $(a + 3)^2 - 4 = 0$, on peut développer et on enchaîne avec Δ et compagnie, mais on peut aussi isoler le carré :

$$\begin{array}{rcll}
(a+3)^2 = & 4 & & \\
a + 3 = \sqrt{4} & \text{ou} & a + 3 = -\sqrt{4} & \text{Il y a deux nombres qui ont pour carré 4 : 2 et } -2. \\
a + 3 = 2 & \text{ou} & a + 3 = -2 & \\
a = -1 & \text{ou} & a = -5 &
\end{array}$$

• On peut aussi prendre le programme "à l'envers" :
On part de $x = 0$ et on remonte.
Pour obtenir 0 après avoir fait -4, on fait $+4$, soit $0 + 4 = 4$.
Pour obtenir 4 quand on élève au carré. On a deux solutions : 2 et -2.
Avec 2 :
Pour obtenir 2 après avoir ajouté 3, on fait -3, soit $2 - 3 = -1$.
Avec -2 :
Pour obtenir -2 après avoir ajouté 3, on fait -3, soit $-2 - 3 = -5$.

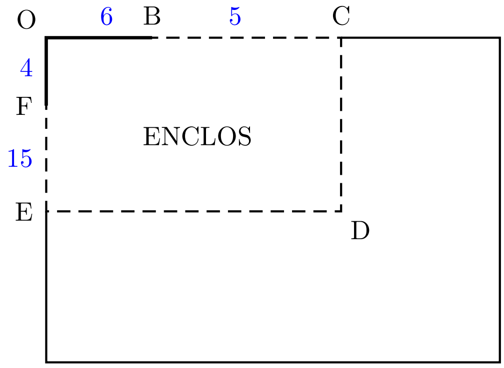
A vous de choisir la méthode mais il faut trouver les solutions et être clair dans ses explications !

Exercice 4

1. a. Le grillage utilisé est donné par :

$$FE + ED + DC + CB = 15 + 11 + 19 + 5 = 50 \text{ m}$$

Elle utilise donc bien tout le grillage.



b. L'aire de l'enclos est donnée par :

$$OC \times OE = 11 \times 19 = 209 \text{ m}^2$$

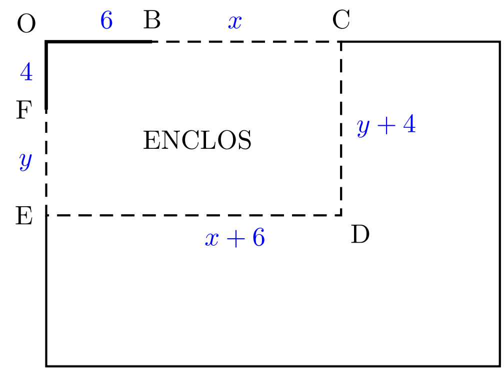
2. a. Comme la longueur du grillage est 50 m, on obtient l'égalité :

$$y + (x+6) + (y+4) + x = 50$$

Soit $2y + 2x + 10 = 50$, soit $2y = 40 - 2x$, soit $y = 20 - x$.

b. L'aire de l'enclos est alors donnée par :

$$(x+6)(y+4)$$



$$\begin{aligned}(x+6)(y+4) &= (x+6)(20-x+4) \quad \text{Car } y = 20 - x.\\ &= (x+6)(24-x)\\ &= 24x - x^2 + 144 - 6x\\ &= -x^2 + 18x + 144\end{aligned}$$

On a donc bien $A(x) = -x^2 + 18x + 144$. La formule de Nabolos est correcte.

3. La fonction A est une fonction polynôme du second degré avec $a = -1$, $b = 18$ et $c = 144$.
Elle est donc croissante puis décroissante puisque $a < 0$.
$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{18}{2 \times (-1)} = 9$.

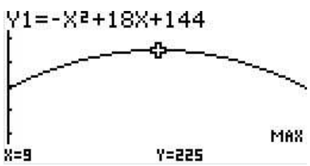
On en déduit le tableau de variations sur $[0\ ;\ 18]$:

Pourquoi ?

Pourquoi 18 ? Je vous laisse chercher. J'attends vos réponses.

x	0	9	18
$A(x)$	144 ↗	225	↘ 0

- $A(0) = 144$
- $A(9) = -9^2 + 18 \times 9 + 144 = 225$.
- $A(18) = -0,5 \times 8^2 + 4 \times 8 = 144$.



Calculatrice

On obtient cette représentation avec $X_{Min} = 0$, $X_{Max} = 18$, $X_{Scale} = 2$
$Y_{Min} = -10$, $Y_{Max} = 300$ et $Y_{Scale} = 50$.
Avec le solveur graphique Gsolv, on obtient le maximum et en quelle valeur il est atteint avec MAX.

L'aire de l'enclos est maximale lorsque $x = 9$. La largeur de l'enclos est $x + 6 = 15$ m et sa longueur est $y + 4 = 20 - x + 4 = 15$ m.
C'est un carré ! L'aire maximale est 225 m^2.