MATHEMATIQUES
Second degré : sujet d'entraînement 2 (corrigé)

Exercice 1

La fonction f est une fonction trinôme du second degré car elle est de la forme ax^2+bx+c avec $a=2$, $b=-1$ et $c=-1$.

1. L'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse -1 est donnée par $f(-1)$.
$f(-1)=2\times(-1)^2-(-1)-1=2+1-1=2$.
Le point A a pour ordonnée 2.

2. a. La forme canonique de f est donnée par $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=f(\alpha)$.

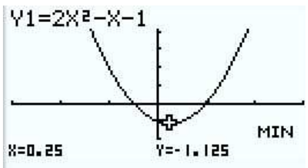
- $\alpha=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{-(-1)}{2\times 4}=\dfrac{1}{4}$.
- $\beta=f\left(\dfrac{1}{4}\right)=2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{1}{4}-1=\dfrac{1}{8}-\dfrac{2}{8}-\dfrac{8}{8}=-\dfrac{9}{8}$.

La forme canonique est : $f(x)=2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{9}{8}$.

b. $a>0$, donc f est d'abord décroissante, puis croissante.
$\alpha=\dfrac{1}{4}$ et $\beta=-\dfrac{9}{8}$

On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$-\dfrac{9}{8}$	$\nearrow$	



Calculatrice

On obtient cette représentation avec $X_{Min}=-3$, $X_{Max}=5$, $X_{Scale}=1$ $Y_{Min}=-30$, $Y_{Max}=25$ et $Y_{Scale}=5$.
Avec le solveur graphique Gsolv, on obtient le minimum et en quelle valeur il est atteint avec MIN . On peut aussi déterminer les racines avec ROOT.

c. $f(x)=0 \iff 2x^2-x-1=0$.
On reconnaît une équation du second degré.
$\Delta=(-1)^2-4\times 2\times(-1)=9$.

$\Delta>0$, donc l'équation a deux solutions : $\begin{cases} x_1=\dfrac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\times 2}=1 \\ x_2=\dfrac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\times 2}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

$\mathscr{S}=\left\{-\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right\}$.

d. La forme factorisée de $f(x)$ est $a(x-x_1)(x-x_2)$ soit $2(x-1)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$.

e. Le trinôme est du signe de a sauf entre les racines. On en déduit le tableau de signes de $f(x)$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. a. La parabole se situe sous l'axe des abscisses lorsque $f(x) < 0$ soit sur $\left]-\frac{1}{2}\ ;\ 1\right[$.

b. Le minimum de f est $-\frac{9}{8}$. Or, $-\frac{9}{8} = -1,125 > -1,2$. On en déduit que la parabole ne coupe pas la droite d'équation $y = -1,2$.

c. $-0,1$ et 0,1 appartiennent à l'intervalle $\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{4}\right]$. Sur cet intervalle, la fonction f est strictement décroissante. On en déduit que les nombres et les images sont dans l'ordre inverse.

$$-0,1 < 0,1 \quad \text{donc} \quad f(-0,1) > f(0,1)$$

d. La fonction g est définie si et seulement si $2x^2 - x - 1 \geqslant 0$.
Ainsi, $\mathscr{D}_g = \left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}\right] \cup [1\ ;\ +\infty[$.

Explication

La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas. La fonction g est définie lorsque les images par la fonction f sont positives.

Exercice 2

1. Faux. En multipliant par 3 les coefficients, on ne change pas les racines. En multipliant par 3, on obtient $3 \times P(x) = 3 \times (ax^2 + bx + c)$. Les racines de $P(x)$ sont les racines de $3 \times P(x)$.

2. Faux. Le polynôme $P(x)$ a deux racines donc son signe change entre les racines.

3. Vrai. Comme le polynôme a deux racines distinctes, $\Delta > 0$.

4. Vrai.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-b+\cancel{\sqrt{\Delta}}-b-\cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} \\ &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

5. Vrai.

$$\begin{aligned} x_1 \times x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{2a \times 2a} \\ &= \frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} \quad \text{On utilise l'égalité remarquable } (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \text{ pour développer.} \\ &= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} \quad (\sqrt{\Delta})^2 = \Delta = b^2 - 4ac. \\ &= \frac{\cancel{b^2}-\cancel{b^2}+4ac}{4a^2} \\ &= \frac{\cancel{4}\cancel{a}c}{\cancel{4}a^{\cancel{2}}} \quad \text{On simplifie} \\ &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Exercice 3

1. Il suffit de calculer la hauteur du ballon lorsque la distance horizontale à partir du tir est de 28 mètres. Autrement dit, il faut calculer $f(28)$.

$f(28) = -\dfrac{28^2}{32} + 28 = 3,5.$

$3,5 > 2,1$ donc Jérémyos ne pourra pas toucher le ballon. Il est trop petit :-)

2. Le ballon retombe pour la valeur de x qui vérifie $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
-\frac{x^2}{32} + x &= 0 \quad \text{Le calcul du discriminant est ici inutile, du fait de la factorisation.} \\
-\frac{1}{32}x^2 + x &= 0 \\
x\left(-\frac{1}{32}x + 1\right) &= 0 \\
x = 0 \quad &\text{ou} \quad -\frac{1}{32}x + 1 = 0 \\
x = 0 \quad &\text{ou} \quad -\frac{1}{32}x = -1 \\
x = 0 \quad &\text{ou} \quad x = -1 \times \frac{-32}{1} \\
x = 0 \quad &\text{ou} \quad x = 32
\end{aligned}$$

Le ballon retombe à 32 mètres de Clémentos (on est bien loin de son record du monde !).

Exercice 4

• $a = f(0) = -2 \times 0^2 + 6 \times 0 - 4 = -4$.

• Les nombres b et c sont les deux solutions réelles de l'équation $f(x) = 0$:
Calcul du discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times (-2) \times (-4) = 36 - 32 = 4 > 0$.
L'équation admet donc deux solutions réelles :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\
&= \frac{-6 - 2}{-4} \\
&= \frac{-8}{-4} \\
&= 2
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
&= \frac{-6 + 2}{-4} \\
&= \frac{-4}{-4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Comme $b < c$, $b = 1$ et $c = 2$.

• d est l'abscisse du sommet de la parabole $\mathscr{P}$ représentative de f :
$d = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-6}{-2 \times 2} = \dfrac{3}{2}$.

• e est l'ordonnée du sommet de $\mathscr{P}$:

$$\begin{aligned}
e = f(d) &= -2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 6 \times \left(\frac{3}{2}\right) - 4 \\
&= -2 \times \left(\frac{9}{4}\right) + 9 - 4 \\
&= -\frac{9}{2} + 5 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

• Enfin k est l'abscisse du point de $\mathscr{P}$ d'ordonnée $-1,5$. On résout donc l'équation $f(k) = -1,5$:

$$\begin{aligned} f(k) = -\frac{3}{2} &\iff -2k^2 + 6k - 4 = -1,5 \\ &\iff -2k^2 + 6k - 4 + 1,5 = 0 \\ &\iff -2k^2 + 6k - 2,5 = 0 \end{aligned}$$

Calcul du discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times (-2) \times (-2,5) = 36 - 20 = 16 > 0$.
L'équation admet donc deux solutions réelles :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-6 - 4}{-4} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-6 + 4}{-4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Comme $0 < k < b$ avec $b = 1$, $k = \dfrac{1}{2}$.