MATHEMATIQUES
Second degré : sujet d'entraînement 3 (corrigé)

Exercice 1

1. a. Avec 2 comme nombre de départ.
- On choisit 2 comme nombre de départ.
- Le carré de 2 est 4 et donc le double du carré est 8.
- On ajoute 6 fois le nombre 2 au nombre 8, soit 20.
- On retranche 8 à 20, soit 12.

Conseils
Prenez le temps d'écrire toutes les étapes du programme afin de bien comprendre le processus.

b. Avec $\sqrt{5}$ comme nombre de départ.
- On choisit $\sqrt{5}$ comme nombre de départ.
- Le carré de $\sqrt{5}$ est 5 et donc le double du carré est 10.
- On ajoute 6 fois le nombre $\sqrt{5}$ au nombre 10, soit $6\sqrt{5}+10$.
- On retranche 8 à $6\sqrt{5}+10$, soit $6\sqrt{5}+2$.

2.
- On choisit x comme nombre de départ.
- Le carré de x est x^2 et donc le double du carré est $2x^2$.
- On ajoute 6 fois le nombre x au nombre $2x^2$, soit $2x^2+6x$.
- On retranche 8 à $2x^2+6x$, soit $2x^2+6x-8$.

Le programme A est en fait la fonction $f : x \longmapsto 2x^2+6x-8$ définie sur $\mathbb{R}$.

3. On est amené à résoudre l'équation $f(x)=0 \iff 2x^2+6x-8=0$.

A reconnaître
C'est une équation du second degré qu'il faut reconnaître. N'hésitez pas à vérifier vos calculs avec le menu EQUATION de la calculatrice.

Calcul du discriminant : $\Delta = b^2-4ac = 6^2-4\times 2\times(-8) = 100 > 0$.
L'équation admet donc deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-10}{4} = -4$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+10}{4} = 1$$

Le résultat du programme A est nul si et seulement si on choisit au départ les nombres (-4) et 1.

4. Le trinôme $2x^2+6x-8$ est du signe de $a=2>0$ sauf entre ses racines.

On ne sait jamais
Cette question porte sur le signe d'un trinôme. Cette règle de signes est à connaître. Si toutefois, vous avez un doute, vous pouvez toujours vous aider de la représentation graphique de cette fonction (utilisez votre calculatrice pour cela).

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$2x^2+6x-8$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Il suffit de choisir un nombre x à « l'extérieur des racines » : soit $x \in]-\infty\ ;\ -4[\cup]1\ ;\ +\infty[$.

5. Le programme B est la fonction $g : x \longmapsto x^2 - 5$ définie sur $\mathbb{R}$.

On cherche les réels x tels que $f(x) = g(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff 2x^2 + 6x - 8 = x^2 - 5 \\ &\iff x^2 + 6x - 3 = 0 \end{aligned}$$

Calcul du discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 48 > 0$.
L'équation admet donc deux solutions réelles :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-6 - \sqrt{48}}{2} \\ &= \frac{-6 - \sqrt{16 \times 3}}{2} \\ &= \frac{-6 - 4\sqrt{3}}{2} \\ &= -3 - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-6 + \sqrt{48}}{2} \\ &= \frac{-6 + \sqrt{16 \times 3}}{2} \\ &= \frac{-6 + 4\sqrt{3}}{2} \\ &= -3 + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Les programmes A et B donnent le même résultat pour $-3 + 2\sqrt{3}$ et pour $-3 - 2\sqrt{3}$

Exercice 2

1. a. Deux méthodes sont possibles pour calculer $S(x)$:

Rappel

$\mathscr{A}_{\text{carré}} = c^2 \qquad \mathscr{A}_{\text{triangle}} = \dfrac{b \times h}{2} \qquad \mathscr{A}_{\text{trapèze}} = \dfrac{B + b}{2} \times h$

1ère méthode

On calcule $S(x)$ en additionnant l'aire du triangle PND et du trapèze MBCP :

$$\begin{aligned} S(x) &= \mathscr{A}_{\text{PND}} + \mathscr{A}_{\text{MBCP}} \\ &= \frac{\text{ND} \times \text{PN}}{2} + \frac{\text{ND} + \text{MP}}{2} \times \text{MB} \\ &= \frac{(10 - x)x}{2} + \frac{10 + x}{2} \times (10 - x) \\ &= \frac{10x - x^2 + 10^2 - x^2}{2} \\ &= \frac{-2x^2 + 10x + 100}{2} \\ &= -x^2 + 5x + 50 \end{aligned}$$

2nde méthode

On calcule $S(x)$ en soustrayant au grand carré ABCD l'aire du petit carré AMPN et du triangle PCD :

$$\begin{aligned} S(x) &= \mathscr{A}_{\text{ABCD}} - \mathscr{A}_{\text{AMPN}} - \mathscr{A}_{\text{PCD}} \\ &= \text{AB} \times \text{AB} - \text{AM} \times \text{AM} - \frac{\text{ND} \times \text{DC}}{2} \\ &= 10^2 - x^2 - \frac{(10 - x) \times 10}{2} \\ &= 100 - x^2 - \frac{100 - 10x}{2} \\ &= 100 - x^2 - 50 + 5x \\ &= -x^2 + 5x + 50 \end{aligned}$$

b. La fonction S est une fonction trinôme de forme développée $S(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = 5$ et $c = 50$.
Elle admet comme forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

- $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-5}{2 \times (-1)} = \dfrac{5}{2}$.
- $\beta = f\left(\dfrac{5}{2}\right) = -\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + 5 \times \dfrac{5}{2} + 50 = \dfrac{225}{4}$.

Merci

C'est plus rapide avec la calculatrice !

Ainsi la forme canonique de $S(x)$ est donnée par :

$$S(x) = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{225}{4}$$

Autre méthode

On peut calculer β avec $\beta = \dfrac{-\Delta}{4a}$ (avec $\Delta = b^2 - 4ac$). Je le déconseille.

c. Pour factoriser $S(x)$, on cherche ses racines à l'aide du discriminant Δ :
$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times (-1) \times 50 = 225 > 0$.

Donc $S(x)$ admet deux racines :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5-15}{-2} = 10$ et $x_2 = \dfrac{-5+15}{-2} = -5$.
D'où $S(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = -(x-10)(x+5)$.

Forme factorisée
Une forme factorisée est un produit. Je préfère le rappeler !

2. a. S est une fonction trinôme avec $a = -1 < 0$. Sa représentation graphique est donc une parabole dont les branches sont orientées vers le bas. S admet donc un maximum sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ car $\alpha = 2{,}5 \in [0\ ;\ 10]$.

Voici le tableau de variations de la fonction S :

x	0	$\frac{5}{2}$	10
$S(x)$	50 $\nearrow$	$\frac{225}{4}$	$\searrow$ 0

b. S admet un maximum de $\dfrac{225}{4}$. Cela signifie géométriquement que l'aire de la surface grisée maximale est $56{,}25$ cm^2 et elle est obtenue en choisissant AM $= 2{,}5$ cm.

3. $S(x) < x^2 \iff -x^2 + 5x + 50 < x^2 \iff -2x^2 + 5x + 50 < 0$.

Conseil
Pour résoudre ce type d'inéquation, ramenez-vous à une étude de signe, c'est-à-dire à une inéquation du type > 0 ou < 0.

On résout cette inéquation du second degré à l'aide du discriminant Δ :
$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times (-2) \times 50 = 425 > 0$. Donc on obtient deux racines :
$x_1 = \dfrac{-5-\sqrt{425}}{-4} \simeq 6{,}4$ et $x_2 = \dfrac{-5+\sqrt{425}}{-4} \simeq -3{,}9 < 0$.
On obtient alors le tableau de signes du trinôme $-2x^2 + 5x + 50$ sur $[0\ ;\ 10]$:

x	0		$x_2 \simeq 6,4$		$+\infty$
Signe de $-2x^2+5x+50$		$+$	0	$-$	
		$\underbrace{\qquad}_{-2x^2+5x+50>0}$		$\underbrace{\qquad}_{-2x^2+5x+50<0}$	

On en déduit que l'aire de la surface grisée est plus petite que celle du petit carré AMPN lorsque l'on choisit AM plus grand que 6,4 cm environ.

Exercice 3

L'équation $2x^2+4x+2m=0$ admet une unique solution réelle si et seulement si $\Delta=0$.

$$\begin{aligned}\Delta=0 &\iff 4^2-4\times 2\times 2m=0\\ &\iff 16-16m=0\\ &\iff -16m=-16\\ &\iff \boxed{m=1}\end{aligned}$$

Avec un paramètre

On calcule le discriminant en fonction du paramètre m. Ensuite on cherche pour quelle(s) valeur(s) de m ce discriminant est nul.

Pour $m=1$, l'équation $2x^2+4x+2=0$ admet une solution unique $\boxed{x_0=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-4}{2\times 2}=-1}$

Exercice 4

1.

Le réel k prend toutes les valeurs entre 0 et 1 avec un pas de 0,1.

Avec le menu TABLE, on peut facilement obtenir toutes les images de x par la fonction f.

k		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y		−1,25	−0,6	−0,05	0,4	0,75	1	1,15	1,2	1,15	1
M	−2	$-1,25$	−0,6	−0,05	0,4	0,75	1	1,15	1,2	1,2	1,2

2. Cet algorithme a pour objectif, par l'intermédiaire de la variable M, de déterminer le maximum (ou du moins une valeur approchée) de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$. Ce maximum est de 1,2 et il est atteint en $x=0{,}8$.