MATHEMATIQUES
Second degré : QCM (corrigé)

Exercice 1

1. Forme canonique de f :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 2x - 24 \\ &= 2(x^2 + x - 12) \\ &= 2\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 12\right) \\ &= 2\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}\right) \\ &= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{2} \end{aligned}$$

Réponse : d.

Autre méthode :
La forme canonique d'une fonction polynôme du second degré est donnée par :

$$f(x = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

On a $a = 2$, $b = 2$ et $c = -24$.
Ainsi, $\alpha = -\dfrac{2}{2 \times 2} = -\dfrac{1}{2}$ et $\beta = f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) - 24 = 2 \times \dfrac{1}{4} - 1 - 24 = \dfrac{1}{2} - 25 = -\dfrac{49}{2}$.

On obtient alors, $f(x) = 2\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{49}{2}$.

2. Les coordonnées du sommet de la parabole sont $(\alpha\ ;\ \beta)$, soit $\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ -\dfrac{49}{2}\right)$.

Réponse : b.

3. $a = 2 > 0$, donc, sur $\mathbb{R}$, f est décroissante, puis croissante.

Les coordonnées du sommet de la parabole sont $\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ -\dfrac{49}{2}\right)$.

On en déduit que le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{49}{2}$	$\nearrow$	

Réponse : c.

4. $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 2 \times (-24) = 196$.

Réponse : c.

5. $\Delta > 0$. On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{196}}{2\times 2} = \frac{-2-14}{4} = -4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{196}}{2\times 2} = \frac{-2+14}{4} = 3$$

Réponse : a.

6. On dresse le tableau de signes de la fonction f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

A savoir !
Le trinôme est du signe de a sauf entre ses racines. Et ici, a est positif car il vaut 2. On met donc des $+$ partout sauf entre les racines.

Explications
Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$, c'est trouver les nombres x dont les images sont strictement positives $(+)$.

$f(x) > 0$, $\qquad \mathscr{S} =]-\infty\ ;\ -4[\cup]3\ ;\ +\infty[$.

Réponse : c.

Exercice 2

1. La forme canonique est $g(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec α et β les coordonnées du sommet de la parabole.
On lit graphiquement $\alpha = 1$ et $\beta = 4$.
Par conséquent, la fonction forme canonique de cette fonction est $g(x) = a(x-1)^2 + 4$.
Il ne reste plus qu'à déterminer la valeur de a.

Pour cela, on utilise un nombre dont on connaît son image par g. Regardez bien la courbe qui représente g ..... que voit-on ? Eh oui, un point sur la courbe dont les coordonnées sont entières. Le point de coordonnées $(3\ ;\ 2)$. On a donc l'égalité : $g(3) = 2$.

$$\begin{aligned} g(3) &= 2 \\ a(3-1)^2 + 4 &= 2 \quad \text{On remplace } x \text{ par 2 dans } g(x) \\ 4a + 4 &= 2 \\ 4a &= -2 \\ a &= -0,5 \end{aligned}$$

Ainsi, $g(x) = -0,5(x-1)^2 + 4$.

Plus rapidement
Une fois qu'on a la forme canonique : $a(x-1)^2 + 4$, sachant que a est strictement négatif car la parabole est tournée vers le bas, la seule proposition qui convient est $g(x) = -0,5(x-1)^2 + 4$.

Réponse : c.

2. Le discriminant de $g(x)$ est strictement positif car la parabole coupe deux fois l'axe des abscisses et donc que l'équation $g(x) = 0$ a deux soltions ....

Réponse : b.

3. Les solutions sont données par :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{8}}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-1+\sqrt{8}}{-1} = 1-\sqrt{8} = 1-2\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{8}}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-1-\sqrt{8}}{-1} = 1+\sqrt{8} = 1+2\sqrt{2}$$

Attention
Il y a deux réponses correctes ici. En effet $\sqrt{8} = \sqrt{4\times 2} = \sqrt{4}\times\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Réponse : a. et b.

Exercice 3

1. Pour le trinôme $x^2 + 2x + 8$, $a = 1$, $b = 2$ et $c = 8$.
$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 8 = 4 - 32 = -28 < 0$.
Par conséquent, le trinôme est toujours du signe de $a = 1$. Il est donc toujours stritement positif.

L'inéquation n'a pas de solution.

Remarque

Quelque soit la valeur de x, $x^2 + 2x + 8$ n'est jamais négatif ou nul.

Réponse : b.

2. Pour le trinôme $\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ et $c = \frac{1}{2}$.
$\Delta = 1^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1 - 1 = 0$.

Le trinôme est donc toujours du signe de a et s'annule en $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \times \frac{1}{2}} = -1$.

Comme $a > 0$, le trinôme est toujours strictement positif et s'annule en $x = -1$. On en déduit que l'inéquation $\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} \leqslant 0$ a pour unique solution : -1.

Réponse : c.

3. Pour le trinôme $-3x^2 + x + 2$, $a = -3$, $b = 1$ et $c = 2$.
$\Delta = 1^2 - 4 \times (-3) \times 2 = 25 > 0$.
On en déduit que le trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2 \times (-3)} = \frac{-1 + 5}{-6} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}.$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2 \times (-3)} = \frac{-1 - 5}{-6} = 1.$$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$-3x^2 + x + 2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Justification

Le trinôme est du signe de a sauf entre ses racines. Et ici, a est négatif car il vaut -3. On met donc des $-$ partout sauf entre les racines.

$-3x^2 + x + 2 > 0$, $\qquad \mathscr{S} = \left]-\frac{2}{3}\ ;\ 1\right[$.

Explications

On regarde sur la deuxième ligne du tableau (celle de $-3x^2 + x + 2$) le signe $+$, puis on lit les solutions de l'inéquation sur la première ligne du tableau.

Réponse : d.

Exercice 4

On cherche la surface des allées :
• Chaque allée à une surface de $8 \times x$ soit $8x$.
• Il y a deux allées. La surface est donc de $16x$.
• En ajoutant les deux surfaces, on compte deux fois le croisement des allées. Il faut donc le retirer : la surface totale des allées est donc $16x - x^2$.

On est donc ramené à résoudre l'équation $16x - x^2 = 15$ pour résoudre le problème.

$$16x - x^2 = 15$$
$$-x^2 + 16x - 15 = 0 \quad \text{On se ramène à une équation du second degré } ax^2 + bx + c = 0$$

$a = -1$, $b = 16$ et $c = -15$.

$\Delta = 16^2 - 4 \times (-1) \times (-15) = 196 > 0$.
On en déduit que le trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 + \sqrt{196}}{2 \times (-1)} = \frac{-16 + 14}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1.$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 - \sqrt{196}}{2 \times (-1)} = \frac{-16 - 14}{-2} = 15.$$

L'équation a deux solutions : 1 et 15. Comme le terrain a la forme d'un carré de côté 8 m, seule la solution 1 répond au problème.

Réponse : d.

Exercice 5

$a = 1$, $b = -6$ et $c = 3$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 24 > 0$.

On en déduit que le trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) - \sqrt{24}}{2 \times 1} = \frac{6 - \sqrt{24}}{2} = \frac{6 - 2\sqrt{6}}{2} = 3 - \sqrt{6}$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) + \sqrt{24}}{2 \times 1} = \frac{6 + \sqrt{24}}{2} = \frac{6 + 2\sqrt{6}}{2} = 3 + \sqrt{6}$$

Réponse : c. et d.

Exercice 6

L'inéquation $x^2 - 2x > 3$ est équivalente à $x^2 - 2x - 3 > 0$.

$a = 1$, $b = -2$ et $c = -3$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$. On en déduit que le trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{2 - 4}{2} = -1$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{2 + 4}{2} = 3$$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x^2 - 2x - 3 > 0$, $\quad \mathscr{S} =]-\infty\ ;\ -1[\cup]3\ ;\ +\infty[$.

Réponse : d.

Exercice 7

1.
- La parabole est tournée vers le haut, donc $a > 0$.
- $f(0) = c$. Graphiquement, $f(0) = 3$, donc $c > 0$.

Réponse : a. et c.

2. La parabole ne coupe pas l'axe des abscisses, donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution. Donc $\Delta < 0$ et $f(x)$ n'a pas de racine réelle.

Réponse : a. et d.