MATHEMATIQUES

Second degré : entraînement savoir-faire 1 (corrigé)

Exercice 1

1. a. $x+7$ s'annule pour $x=-7$ et $-2x+8$ s'annule pour $x=4$. On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		-7		4		$+\infty$
Signe de $x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-2x+8$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Explications

C'est sur la dernière ligne du tableau qu'apparaît le signe de $f(x)$. Les solutions de l'inéquation $f(x)<0$ se lisent sur la première ligne du tableau.

b. $\mathscr{S} =]-\infty\ ;\ -7[\cup]4\ ;\ +\infty[$.

2. a. On factorise $4-16x^2$ qui est une différence de deux carrés.

$$\begin{aligned} 4-16x^2 &= \underbrace{2^2}_{a^2} - \underbrace{(4x)^2}_{b^2} \\ &= \underbrace{(2-4x)}_{(a-b)}\underbrace{(2+4x)}_{(a+b)} \end{aligned}$$

Egalité remarquable

Cette forme (a^2-b^2) est à reconnaître. L'égalité remarquable utilisée est : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

b. $2-4x$ s'annule pour $x=0,5$ et $2+4x$ s'annule pour $x=0,5$. On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-0{,}5$		$0{,}5$		$+\infty$
Signe de $2-4x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $2+4x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $4-16x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Méthode

• La résolution de cette inéquation passe par un tableau de signe. La factorisation demandée à la question précédente vous servira pour cette question.
• Les signes de $2+4x$ et $2-4x$ s'obtiennent grâce aux signes des fonctions affines : signe de m à droite de la valeur qui annule), ou bien utilisez la représentation graphique et le sens de variation des fonctions affines.

Ainsi, l'inéquation $4-16x^2 \geqslant 0$ a pour ensemble de solutions $[-0,5\ ;\ 0,5]$.

Exercice 2

1. Les fonctions polynômes du second degré s'annulant en 8 et -3 sont de la forme :

$f(x) = a(x-8)(x-(-3))$ soit $f(x) = a(x-8)(x+3)$ avec a un réel non nul.

> **Méthode**
> Pour déterminer les polynômes du second degré s'annulant en deux réels, on utilise la forme factorisée.

2. Les fonctions polynômes du second degré s'annulant en 8 et -3 sont de la forme : $g(x) = a(x-(-1))(x-6)$ soit $g(x) = a(x+1)(x-6)$ avec a un réel non nul.

L'égalité $g(0) = 4$ se traduit par $a(0+1)(0-6) = 4$ soit $-6a = 4$, soit $a = -\frac{2}{3}$.
On en déduit que la fonction g est définie par :

$$g(x) = -\frac{2}{3}(x+1)(x-6)$$

> **Remarque**
> Avec la condition supplémentaire $g(0) = 4$, il n'y a plus qu'une seule fonction g qui vérifient ces conditions.

Exercice 3

1. $f(x) = x^2 + 3x + 1$.

Méthode 1 : avec une manipulation calculatoire

$$\begin{aligned}
f(x) &= \boxed{x^2+3x}+1 && \text{L'expression encadrée est le début d'un carré : celui de } \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 \\
&= \boxed{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}+1 && \text{On retranche le carré de } \frac{3}{2} \text{ soit } \frac{9}{4} \text{ pour que les deux expressions dans les cadres soient égal} \\
&= \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{4}{4} \\
&= \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} && \text{C'est la forme canonique de } f(x)
\end{aligned}$$

Méthode 2 : avec la formule magique
La forme canonique d'une fonction polynôme du second degré est donnée par : $a(x-\alpha)^2 + \beta$.

$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2\times 1} = \frac{-3}{2}$.
$\beta = f(\alpha) = f\left(\frac{-3}{2}\right) = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 + 3\times\frac{-3}{2} + 1 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 1 = \frac{9}{4} - \frac{18}{4} + \frac{4}{4} = -\frac{5}{4}$.
Donc la forme canonique est : $f(x) = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$.

2. $g(x) = 3x^2 - 12x + 4$.

Méthode 1 : avec une manipulation calculatoire

$$\begin{aligned}
g(x) &= 3\left(x^2 - 4x + \frac{4}{3}\right) && \text{On commence par mettre } a \text{ en facteur} \\
&= 3\left(\boxed{x^2 - 4x} + \frac{4}{3}\right) && \text{L'expression encadrée est le début d'un carré : celui de}(x-2)^2 \\
&= 3\left(\boxed{(x-2)^2 - 4} + \frac{4}{3}\right) && \text{On retranche le carré de 2 soit 4 pour que les deux expressions dans les cadres soient égale} \\
&= 3\left((x-2)^2 - \frac{12}{3} + \frac{4}{3}\right) \\
&= 3\left((x-2)^2 - \frac{8}{3}\right) \\
&= 3(x-2)^2 - 8 && \text{Car } 3 \times \frac{8}{3} = 8
\end{aligned}$$

Méthode 2 : avec la formule magique
La forme canonique d'une fonction polynôme du second degré est donnée par : $a(x-\alpha)^2 + \beta$.

$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-12}{2 \times 3} = 2$.
$\beta = g(\alpha) = g\,(2) = 3 \times (2)^2 - 12 \times (2) + 4 = 12 - 24 + 4 = -8$.

Donc la forme canonique est : $g(x) = 3(x-2)^2 - 8$.

3. $h(x) = -x^2 + 2x + 2$.

Méthode 1 : avec une manipulation calculatoire

$$\begin{aligned}
h(x) &= -1\left(x^2 - 2x - 2\right) && \text{On commence par mettre } a \text{ en facteur} \\
&= -\left(\boxed{x^2 - 2x} - 2\right) && \text{L'expression encadrée est le début d'un carré : celui de}(x-1)^2 \\
&= -\left(\boxed{(x-1)^2 - 1} - 2\right) && \text{On retranche le carré de 1 soit 1 pour que les deux expressions dans les cadres soient égale} \\
&= -\left((x-1)^2 - 3\right) \\
&= -(x-1)^2 + 3
\end{aligned}$$

Méthode 2 : avec la formule magique
La forme canonique d'une fonction polynôme du second degré est donnée par : $a(x-\alpha)^2 + \beta$.

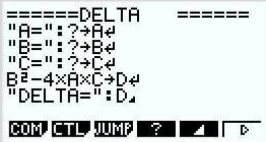
$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2}{2 \times (-1)} = 1$.
$\beta = h(\alpha) = h\,(1) = - \times (1)^2 + 2 \times (1) + 2 = 3$.

Donc la forme canonique est : $h(x) = -(x-1)^2 + 3$.

Exercice 4

Calculatrice

Pour obtenir la valeur de delta avec la calculatrice, il faut réaliser un petit programme. Entrez dans PRGM, puis nommer le nouveau programme Nom programme [DELTA] (en utilisant ALPHA qui permet d'accéder aux lettres). Ensuite taper le programme :



Pour obtenir, ?, : ou ◢ il faut sélectionner SHIFT puis VARS. La flèche, s'obtient avec →, les guillemets ou le signe = avec SHIFT ou ALPHA puis • ×10ˣ.
L'execution du programme se fait à l'aide de EXE après être sorti avec EXIT.
Entrez alors les valeurs de a, b et c comme demandé, puis la valeur de delta s'affiche. Ouf !!!
Si ce n'est pas clair, ce que je peux comprendre, n'hésitez pas à demander à votre professeur préféré.

a. $4x^2 + 3x - 2 = 0$.

On reconnaît une équation du second degré avec $a = 4$, $b = 3$ et $c = -2$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 4 \times (-2) = 41 > 0$, donc l'équation a deux solutions.

Conseil

Regardez attentivement l'équation avant de vous lancer dans le calcul de delta et tout le toutim. Certaines équations du second degré se résolvent plus simplement.... pas celle-là !

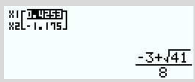
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{41}}{2 \times 4} = \frac{-3 - \sqrt{41}}{8}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{41}}{2 \times 4} = \frac{-3 + \sqrt{41}}{8}$$

$$\mathscr{S} = \left\{ \frac{-3 - \sqrt{41}}{8} \ ; \ \frac{-3 + \sqrt{41}}{8} \right\}.$$

Calculatrice

Outre le calcul de delta que l'on peut vérifier avec le petit programme précédent, vous avez un module intégrer dans votre calculatrice qui permet d'avoir les solutions de cette équation.
Dans le menu EQUA, puis F2 F2:Polynomiale, selectionnez le degré (ici 2) avec F1, puis indiquez les coefficients : aX²+bX+c=0 [4 3 −2]. La calculatrice affiche alors les deux solutions :



b. $2x^2 - 8x = -8$.
Cette équation s'écrit : $2x^2 - 8x + 8 = 0$.
On reconnaît une équation du second degré avec $a = 2$, $b = -8$ et $c = 8$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 8 = 0$ donc l'équation a une solution.

Pensez-y !

L'écriture de cette équation n'est pas immédiatement celle d'une équation du second degré. Mais en ajoutant 8 dans chaque membre, on retrouve bien notre forme $ax^2 + bx + c = 0$.

Calculatrice

En procédant de la même façon que précédemment, la calculatrice affiche :

X1 2

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2 \times 2} = 2.$$

$\mathscr{S} = \{2\}$.

Remarque

On pouvait procéder de la façon suivante :
$2x^2 - 8x + 8 = 0$ est équivalente à $2(x^2 - 4x + 4) = 0$ soit $2(x-2)^2 = 0$ qui a pour solution $x = 2$.

c. $x^2 + 5x + 3 = 3x + 1$. Cette équation s'écrit $x^2 + 2x + 2 = 0$.

On reconnaît une équation du second degré avec $a = 1$, $b = 2$ et $c = 2$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 < 0$, donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

$\mathscr{S} = \emptyset$.

Conseil

Là encore, on fait en sorte de rendre nul le deuxième membre en retranchant $3x$ et 1 dans chaque membre.

Calculatrice

La calculatrice affiche alors :