MATHEMATIQUES
Second degré : entraînement savoir-faire 2 (corrigé)

Exercice 1

1. $f(x) = x^2 - 4x + 1$.
f est une fonction polynôme du second degré avec $a = 1$, $b = -4$ et $c = 1$.
$a > 0$, donc f est d'abord décroissante, puis croissante.
$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-(-4)}{2 \times 1} = \dfrac{4}{2} = 2$.

Attention

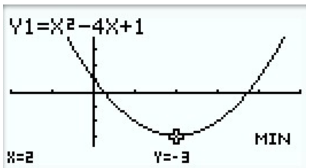
Attention aux signes : $b = -4$, donc $-b = -(-4) = 4$.

$f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 1 = -3$.
On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$

Remarques

Utilisez votre calculatrice pour "vérifier" le tableau et pour déterminer le minimum de f.



Calculatrice

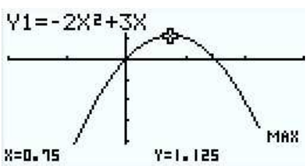
Après avoir sélectionné le menu GRAPH, on entre la fonction (après avoir appuyé sur EXE il doit y avoir un petit carré noir sur le signe =, qui montre que la fonction est bien sélectionnée) : Y1■X^2-4X+1. On paramètre la fenêtre d'affichage avec V-Window obtenu grâce à SHIFT puis F3 : $X_{Min} = -2$, $X_{Max} = 5$, $X_{Scale} = 1$ $Y_{Min} = -5$, $Y_{Max} = 5$ et $Y_{Scale} = 1$.
En utilisant MIN avec le solveur graphique Gsolv (atteint avec SHIFT, puis F5), on obtient l'écran ci-contre.

2. $g(x) = -2x^2 + 3x$.

g est une fonction polynôme du second degré avec $a = -2$, $b = 3$ et $c = 0$.
$a < 0$, donc g est d'abord croissante, puis décroissante.
$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-3}{2 \times (-2)} = 0,75$.

$g(0,75) = -2 \times 0,75^2 + 3 \times 0,75 = 1,125$.
On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	0,75	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	1,125	$\searrow$



Calculatrice

On obtient cette représentation avec $X_{Min} = -2$, $X_{Max} = 3$, $X_{Scale} = 1$ $Y_{Min} = -5$, $Y_{Max} = 2$ et $Y_{Scale} = 1$.

Avec le solveur graphique Gsolv F5, puis MAX on obtient l'écran ci-contre.

3. $u(x) = -x^2 + x - 3$.

u est une fonction polynôme du second degré avec $a = -1$, $b = 1$ et $c = -3$.
$a < 0$, donc u est d'abord croissante, puis décroissante.
$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-1}{2 \times (-1)} = 0,5$.
$0,5 \in [-5 \; ; \; 4]$. On en déduit le tableau de variations :

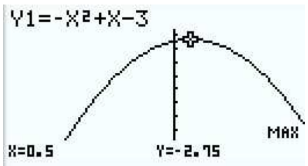
x	-5		$0{,}5$		4
$u(x)$			$-2{,}75$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	-33				-15

Remarque

On commence par les variations sur $\mathbb{R}$. On en déduit ensuite les variations sur l'intervalle considéré.

Remarques

Utilisez votre calculatrice pour "vérifier" le tableau et pour déterminer les valeurs remarquables de la fonction : $u(-1)$, $u(0,5)$ et $u(3)$.



Calculatrice

On obtient cette représentation avec $X_{Min} = -5$, $X_{Max} = 4$, $X_{Scale} = 1$ $Y_{Min} = -20$, $Y_{Max} = 1$ et $Y_{Scale} = 2$.

Avec le solveur graphique Gsolv, puis MAX on obtient l'écran ci-contre. Pour obtenir les valeurs remarquables dans le tableau, on utilise toujours le solveur graphique, on cherche Y-CAL dans le munu du solveur graphique (utilisez ▷ pour le faire apparaître), puis et on entre les valeurs de x (-5 puis on recommence avec 4).

4. $v(x) = x^2 + 2x - 4$.

v est une fonction polynôme du second degré avec $a = 1$, $b = 2$ et $c = -4$.
$a < 0$, donc v est d'abord décroissante, puis croissante.
$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-2}{2 \times 1)} = -1$.
$-1 \notin [0 \; ; \; 10]$. On en déduit le tableau de variations :

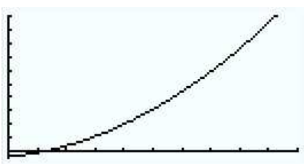
x	0		10
$v(x)$			116
		$\nearrow$	
	-4		

Remarque

On commence par les variations sur $\mathbb{R}$. On en déduit ensuite les variations sur l'intervalle considéré.

Remarques

Utilisez votre calculatrice pour "vérifier" le tableau et pour déterminer les valeurs remarquables $v(0)$ et $v(10)$.



Calculatrice

On obtient cette représentation avec $X_{Min} = 0$, $X_{Max} = 10$, $X_{Scale} = 1$ $Y_{Min} = -5$, $Y_{Max} = 100$ et $Y_{Scale} = 10$.
Pour obtenir les valeurs remarquables dans le tableau, on utilise le solveur graphique Gsolv, on utilise Y-CAL et on entre les valeurs de x (0 puis on recommence avec 10). L'image de 0 est facilement calculable de tête, il me semble !

Exercice 2

Connaissance

La factorisation (si elle existe) d'un polynôme du second degré est donnée par :

$$a(x-x_1)(x-x_2)$$

x_1 et x_2 étant les racines du trinôme.
Si le trinôme n'a pas de racine, alors pas de factorisation possible, et s'il en a qu'une : x_0, alors la factorisation est donnée par : $a(x-x_0)^2$.

a. $3x^2-6x-9$.

$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times 3\times(-9)=144>0$. Donc le trinôme a deux racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-6)-\sqrt{144}}{2\times 3}=\frac{6-12}{6}=-1$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-6)+\sqrt{144}}{2\times 3}=\frac{6+12}{6}=3$$

Pensez-y !

Les racines du trinôme ax^2+bx+c sont les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$, vous pouvez de la même façon obtenir les racines avec votre calculatrice.

On en déduit la factorisation : $3x^2-6x-9=3(x-(-1))(x-3)=3(x+1)(x-3)$.

b. $-x^2-12x+28$.
$\Delta=b^2-4ac=(-12)^2-4\times(-1)\times 28=256>0$. Donc le trinôme a deux racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-12)-\sqrt{256}}{2\times(-1)}=\frac{12-16}{-2}=2$$
$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-12)+\sqrt{256}}{2\times(-1)}=\frac{12+16}{-2}=-14$$

On en déduit la factorisation : $-x^2-12x+28=-1(x-2)(x-(-14))=-(x-2)(x+14)$.

c. $-x^2+5x-10$.
$\Delta=b^2-4ac=5^2-4\times(-1)\times(-10)=-15<0$. Donc le trinôme n'a pas de racine.
Pas de factorisation pour ce trinôme.

Exercice 3

1. a. $-x^2+x+6$.
On reconnaît un trinôme du second degré. On cherche donc les valeurs éventuelles qui l'annulent :

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times(-1)\times 6=25>0$. Donc le trinôme a deux racines :

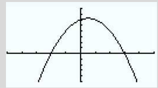
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{25}}{2\times(-1)}=\frac{-1-5}{-2}=3$$
$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{25}}{2\times(-1)}=\frac{-1+5}{-2}=-2$$

Le trinôme est toujours du signe de $a = -1$ sauf entre les racines. On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
Signe de $-x^2+x+6$		$-$	0	$+$	0	$-$	
		Signe de a		Signe opposé de a		Signe de a	

Interprétation graphique

Avec la calculatrice, on obtient :



La parabole est bien au dessus de l'axe des abscisses entre -2 et 3, donc les images sont bien positives entre -2 et 3 et négatives ailleurs.

b. $x^2 - 3x + 2$

On reconnaît un trinôme du second degré. On cherche donc les valeurs éventuelles qui l'annulent :

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$. Donc le trinôme a deux racines :

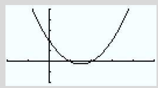
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{3-1}{2} = 1$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{3+1}{2} = 2$$

Le trinôme est toujours du signe de $a = 1$ sauf entre les racines. On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
Signe de x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	
		Signe de a		Signe opposé de a		Signe de a	

Interprétation graphique

Avec la calculatrice, on obtient :



La paraole est bien en dessous de l'axe des abscisses entre 1 et 2, donc les images sont bien négatives entre 1 et 2 et positives ailleurs.

2. $-x^2 + x + 6 \geqslant 0$.

Le tableau de signes a été fait précédemment :

		$x \in]-\infty\ ;\ -2[$		$x \in]-2\ ;\ 3[$		$x \in]3\ ;\ +\infty[$	
x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
Signe de $-x^2+x+6$		$-$	0	$+$	0	$-$	
		$-x^2+x+6<0$		$-x^2+x+6>0$		$-x^2+x+6<0$	

Explication

On veut savoir pour quelles valeurs de x, $-x^2 + x + 6$ est positif ou nul. Sur la ligne de $-x^2 + x + 6$, on regarde le signe $+$. Les solutions sont les valeurs de x correspondantes.

$\mathscr{S} = [-2\ ;\ 3]$.

Exercice 4

1. La fonction f est une fonction polynôme du second degré avec $a = -9$, $b = 12$ et $c = 5$.

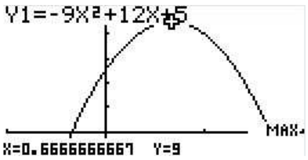
Comme $a < 0$, la fonction est d'abord strictement croissante, puis strictement croissante.

$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{12}{2 \times (-9)} = \dfrac{2}{3}$.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	9	$\searrow$	

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = -9 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 12 \times \frac{2}{3} + 5 = 9.$$



Calculatrice

On obtient cette représentation avec $X_{Min} = -1$, $X_{Max} = 2$, $X_{Scale} = 1$ $Y_{Min} = -2$, $Y_{Max} = 10$ et $Y_{Scale} = 2$.
Avec le solveur graphique Gsolv, on obtient le maximum et en quelle valeur il est atteint avec MAX.

2. Démonstration de l'égalité.

$$\begin{aligned}(5-3x)(1+3x) &= 5+15x-3x-9x^2\\ &= -9x^2+12x+5\\ &= f(x)\end{aligned}$$

Donc pour tout x réel, $f(x) = (5-3x)(1+3x)$.

Explications

Pour démontrer l' égalité $f(x) = (5-3x)(1+3x)$, on est parti du membre de droite et on a développé pour retrouver le membre de gauche. Faites attention de ne pas écrire la conclusion au départ : pour être plus clair, ne commencez pas en écrivant :
$f(x) = (5-3x)(1+3x) = \ldots\ldots$

3. Démonstration de l'égalité.

$$\begin{aligned}-9\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+9 &= -9\left(\underbrace{x^2}_{a^2}-\underbrace{\frac{4}{3}x}_{2ab}+\underbrace{\frac{4}{9}}_{b^2}\right)+9\\ &= -9x^2+\underbrace{12x}_{9\times\frac{4}{3}x=12x}-4+9\\ &= -9x^2+12x+5\\ &= f(x)\end{aligned}$$

Explications

On commence par développer le carré en utilisant l'égalité remarquable :
$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$, avec $a = x$ et $b = \dfrac{2}{3}$.

Donc pour tout x réel, $f(x) = -9\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+9$.

4. a. Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{P}$ avec l'axe des abscisses sont donnés par les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

On prend la **forme 2** pour résoudre cette équation.

Pourquoi ?

Parce que avec cette forme, on doit résoudre une équation produit et c'est rapide.

$$\begin{aligned}(5-3x)(1+3x) &= 0 \quad \text{C'est une équation produit nul.}\\ 5-3x=0 \quad &\text{ou} \quad 1+3x=0\\ -3x=-5 \quad &\text{ou} \quad 3x=-1\\ x=\frac{5}{3} \quad &\text{ou} \quad x=\frac{-1}{3}\end{aligned}$$

La parabole $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses en $\left(\dfrac{5}{3}\ ;\ 0\right)$ et $\left(-\dfrac{1}{3}\ ;\ 0\right)$.

b. On calcule $f(0)$ avec la **forme 1**.

$f(0) = -9\times 0^2+12\times 0+5 = 5$.

Pourquoi ?

Tout simplement parce que le calcul est très simple (plus rapide) avec cette forme.

La parabole $\mathscr{P}$ coupe l'axe des ordonnées en $(0\ ;\ 5)$.

c. Pour résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$, on prend la **forme 2**.

Explications

Pour résoudre cette inéquation, on est amené à dresser le tableau de signes de $f(x)$. Cela tombe bien on a une forme factorisée de $f(x)$.

$5-3x$ s'annule pour $x = \dfrac{5}{3}$ et $1+3x$ s'annule pour $x = -\dfrac{1}{3}$. On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{3}$		$\dfrac{5}{3}$		$+\infty$
Signe de $5-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $1+3x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\underbrace{\qquad\qquad}_{f(x)\geqslant 0}$

$\mathscr{S} = \left[-\dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{5}{3}\right]$.

Graphiquement, cela signifie que la parabole se situe au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{5}{3}\right[$.

Conseil

Regardez l'écran de votre calculatrice pour vérifier la cohérence de ce résultat. C'est important de savoir faire le lien entre le calcul et le graphique.

d. On utilise la forme canonique **forme 3**.

On a pour tout réel x, $f(x) - 9 = -9\left(x - \dfrac{2}{3}\right)^2$.

Pourquoi ?

Pour comparer deux nombres, une méthode consiste à étudier le signe de leur différence. Et là, en faisant la différence entre la forme canonique et 9 on obtient le produit d'un carré (dont on connaît le signe) et de (-9) (dont on connaît le signe aussi). Vous ne l'aviez pas vu ?

Or, pour tout réel x, $\left(x - \dfrac{2}{3}\right)^2 \geqslant 0$ et par suite $-9\left(x - \dfrac{2}{3}\right)^2 \leqslant 0$.

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) - 9 \leqslant 0$, soit $f(x) \leqslant 9$ et comme $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = 9$, on a pour tout réel x, $f(x) \leqslant f\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

On vient donc de montrer que f admet sur $\mathbb{R}$ un maximum égal à 9, atteint pour $x = \dfrac{2}{3}$.