MATHEMATIQUES
Suites arithmétiques et géométriques : sujet d'entraînement 1

Exercice 1

Déterminer en justifiant u_{20} dans les deux cas suivants :

1. $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 3$.

2. $u_0 = -3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 2

Pour chacune des quatre situations suivantes, indiquer la nature, le premier terme (notation et valeur), la raison et le sens de variation de la suite (u_n) qui y est définie, ainsi que l'expression de u_n en fonction de n.

• **Situation 1 :** On injecte 8 cm^3 d'un produit calmant à un malade.
À chaque heure, 10% du produit présent dans l'organisme est éliminé.
On note u_n le volume, exprimé en cm^3, du produit calmant présent dans l'organisme du malade n heures après l'injection.

• **Situation 2 :** Un cycliste reprend l'entraînement après une période d'interruption dûe à une blessure ; il prévoit d'effectuer 80 km le premier jour puis de parcourir chaque jour 10 km de plus que la veille.
On note u_n la distance, exprimée en kilomètres, parcourue par le cycliste lors de son n-ième jour d'entraînement.

• **Situation 3 :** Une ville française comptait 28400 habitants en l'an 2000. Depuis, sa population a diminué de 500 habitants par an. On note u_n le nombre d'habitants de cette ville en $(2000 + n)$.

• **Situation 4 :** Un salarié se voit proposer le contrat d'embauche suivant : le salaire annuel s'élève à 24000 €lors de la première année et augmentera chaque année de 3%. On note u_n le salaire annuel, en euros, que percevra le salarié lors de sa n-ième année de contrat.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 3

Depuis qu'il est à la retraite, Nabolos tond sa pelouse tous les samedis. Il recueille chaque fois 120 litres de gazon qu'il stocke dans un bac à compost de 180 litres. Chaque semaine, les matières stockées perdent, par décomposition ou par prélèvement, les trois quarts de leur volume.

Pour $n \geqslant 1$, on note v_n le volume, exprimé en litres, présent dans le bac à compost le n-ième samedi après la tonte.

1. Que vaut v_1 ? Calculer v_2 puis v_3.

2. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier $n \geqslant 1$.

3. Soit t la suite définie par $t_n = 160 - v_n$.

- **a.** Prouver que t est une suite géométrique.
- **b.** Exprimer v_n en fonction de n.
- **c.** Le bac à compost risque-t-il de déborder un jour ?

Exercice 4

On considère la suite (an) définie par $a_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \dfrac{(n+1) \times a_n + 4}{n+2}$.

1. Calculer a_1 et a_2 puis justifier que (a_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2. Soit (b_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $b_n = (n+1) \times a_n$.

- **a.** Calculer b_0, b_1 et b_2 puis prouver que (b_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
- **b.** En déduire l'expression de a_n en fonction de n.

Exercice 5

Dans le cadre d'un test d'efficacité d'un médicament, on en injecte une dose de 2ml à un malade, on étudie l'évolution de la quantité présente dans son sang au bout de n heures et constate que celle-ci diminue de 30% par heure. Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité, exprimée en ml, de médicament présent dans le sang du malade n heures après l'injection.

1. a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de u puis exprimer u_n en fonction de n.

b. Vérifier qu'au bout de deux heures, plus de la moitié de la quantité injectée a été éliminée.

2. Afin d'éviter un surdosage, on ne procède à une nouvelle injection de 2ml que lorsqu'il ne reste plus dans le sang du patient que 0,2ml de médicament. Peut-on procéder à une deuxième injection cinq heures après la première ?

3. On considère l'algorithme suivant :

```
n ⟵ 0
u ⟵ 2
Tant que u > d :
n ⟵ n + 1
u ⟵ 0,7 × u
Fin Tant que
```

On choisit d'exécuter cet algorithme avec $d = 0,2$.
Recopier et compléter le tableau suivant autant que nécessaire en arrondissant les résultats au millième près.

Que contient la variable n à la fin de l'exécution de cet algorithme ? Interpréter concrètement ce résultat.

n	0	1	2	....
Valeur de u	2			
Condition $u > d$	Vrai			

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....