MATHEMATIQUES

Suites arithmétiques et géométriques : sujet d'entraînement 1 (corrigé)

Exercice 1

1. u est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 8.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr = 8 + 3n$.
$u_{20} = 8 + 3 \times 20 = 68$.

A reconnaître
L'expression de récurrence de la suite est celle d'une suite arithmétique : elle est de la forme $u_{n+1} = u_n + r$.

2. u est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme -3.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = -3 \times 2^n$.
$u_{20} = -3 \times 2^{20} = -3145728$.

A reconnaître
L'expression de récurrence de la suite est celle d'une suite géométrique : elle est de la forme $u_{n+1} = q \times u_n$.

Exercice 2

Situation 1 :
Diminuer une quantité de 10 % revient à la multiplier par $0,9$.
Ainsi, chaque heure le volume de calmant est multiplié par 0,9. Comme u_n est le volume de calmant présent dans l'organisme n heures après l'injection, alors pour tout entier naturel n, on a la relation :

$$u_{n+1} = 0,9 \times u_n$$

Pourcentage
Diminuer une quantité de t % revient à la multiplier par $1 - \dfrac{t}{100}$.

u est donc une suite géométrique de premier terme $u_0 = 8$ (le moment de l'injection correspond à $n = 0$) et de raison 0,9.

L'expression de u_n en fonction de n est donc : $u_n = u_0 \times q^n = 8 \times 0,9^n$.

La suite $(0,9^n)$ est strictement décroissante, donc la suite u est strictement décroissante.

Sens de variation
Le premier terme de la suite est strictement positif, c'est pour cela que le sens de variation de la suite est le même que celui de $(0,9^n)$. On ne change pas les variations quand on multiplie par un nombre positif.

Situation 2 :
Chaque jour, le cycliste parcourt 10 km de plus que la veille.
De plus, le premier jour il parcourt 80 km.
Comme u_n est la distance parcourue lors de son n-ième jour d'entraînement, on a donc $u_1 = 80$ et $u_{n+1} = u_n + 10$.

u est donc une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 80$ et de raison 10.

L'expression de u_n en fonction de n est donc : $u_n = u_1 + (n-1)r = 80 + (n-1) \times 10 = 10n + 70$.

Comme la raison de la suite est strictement positive, cette suite est strictement croissante.

Situation 3 :
La population de la ville diminue chaque année de 500 habitants. Comme u_n est le nombre d'habitants de cette ville en $(2000+n)$, on a pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n - 500$.

En 2000, il y avait 28400 habitants, ainsi, $u_0 = 28400$.

Question à se poser
Posez-vous la question suivante : que désigne u_0 dans le contexte de l'exercice ? Ici, u_0 est le nombre d'habitants en (2000+0) soit en 2000.

u est donc une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 28400$ et de raison -500.

L'expression de u_n en fonction de n est donc $u_n = u_0 + nr = 28400 - 500n$.

Cette suite est strictement décroissante car la raison de la suite arithmétique est strictement négative.

Situation 4 :
Augmenter une quantité de 3 % revient à la multiplier par $1,03$.
Ainsi, chaque année le salaire est multiplié par 1,03. Comme u_n désigne le salaire lors de sa n-ième année de contrat, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 1,03u_n$$

Lors de sa première année, son salaire est de 24000 €, ainsi, $u_1 = 24000$.

Attention
Dans cette situation, u_0 n'a pas de sens. La suite commence à u_1.

u est donc une suite géométrique de premier terme $u_1 = 24000$ et de raison $1,03$.

L'expression de u_n en fonction de n est donc $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 24000 \times 1,03^{n-1}$.

La suite $(1,03^n)$ est strictement croissante, donc la suite u est strictement croissante.

Sens de variation
Le premier terme de la suite est strictement positif, c'est pour cela que le sens de variation de la suite est le même que celui de $(1,03^n)$. On ne change pas les variations quand on multiplie par un nombre positif.

Exercice 3

1. v_1 représente le volume en litre présent dans le bac à compost le premier samedi après la tonte. On a donc $v_1 = 120$.

Chaque semaine, les matières stockées perdent, par décomposition ou par prélèvement, les trois quarts de leur volume, donc il reste dans le bac à compost un quart du volume la tonte de la semaine précédente.

Pourcentage
Diminuer une quantité de 75 % (trois quart) revient à la multiplier par $1 - 0,75 = 0,25$.

De plus on ajoute les 120 litres de gazon, ainsi :

$$v_2 = \underbrace{0,25 \times v_1}_{\text{Quantité qui reste de la tonte du 1er samedi}} + \underbrace{120}_{\text{Volume de gazon ajouté par la tonte du 2ième samedi.}}$$

$v_2 = 0,25 \times 120 + 120 = 150$.
Dans le bac à compost, après la tonte du deuxième samedi, il y aura 150 litres de matières dans le bac.

En suivant le même raisonnement que précédemment :

$$v_3 = \underbrace{0,25 \times v_2}_{\substack{\text{Quantité qui}\\ \text{reste de la}\\ \text{tonte}\\ \text{du 2ième samedi}}} + \underbrace{120}_{\substack{\text{Volume de}\\ \text{gazon ajouté}\\ \text{par la tonte}\\ \text{du 3ième samedi.}}}$$

$v_3 = 0,25 \times 150 + 120 = 157,5$.
Dans le bac à compost, après la tonte du deuxième samedi, il y aura 157,5 litres de matières dans le bac.

2. On généralise le raisonnement :

$$v_{n+1} = \underbrace{0,25 \times v_n}_{\substack{\text{Quantité qui}\\ \text{reste de la}\\ \text{tonte}\\ \text{du n-ième samedi}}} + \underbrace{120}_{\substack{\text{Volume de}\\ \text{gazon ajouté}\\ \text{par la tonte}\\ \text{du}\\ \text{(n+1) ième samedi.}}} = 0,25v_n + 120$$

3. a. On calcule les premiers termes de la suite t :

$t_1 = 160 - v_1 = 160 - 120 = 40$

$t_2 = 160 - v_2 = 160 - 150 = 10$

$t_3 = 160 - v_3 = 160 - 157,5 = 2,5$.

$\dfrac{t_2}{t_1} = 0,25$ et $\dfrac{t_3}{t_2} = 0,25$.

On conjecture que la suite t est géométrique de raison $0,25$.

Important !

Ces calculs ne sont pas obligatoires. Ils permettent quand d'avoir une idée de ce que l'on cherche à démontrer. Ainsi, la raison de la suite ne peut qu'être 0,25. J'insiste : ces calculs ne permettent pas de conclure que la suite t est géométrique. Il faut prouver que ce résultat est vrai pour tous les entiers n, c'est-à-dire montrer que $t_{n+1} = 0,25 \times t_n$.

Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}
t_{n+1} &= 160 - \underbrace{v_{n+1}}_{=0,25v_n+120} \\
&= 160 - (0,25v_n + 120) \\
&= 160 - 0,25v_n - 120 \\
&= 40 - 0,25v_n \\
&= 40 - 0,25(\underbrace{160 - t_n}_{=v_n}) \quad \text{On remplace } v_n \text{ par } 160 - t_n. \\
&= \cancel{40} - \cancel{40} + 0,25t_n \quad \text{On développe et réduit.} \\
&= 0,25t_n
\end{aligned}$$

Passage délicat

N'oubliez pas le résultat que vous voulez atteindre. Je vous conseille même de l'écrire dans un coin.... (on veut obtenir $t_{n+1} = q \times t_n$ et on peut facilement "deviner" quelle sera la valeur de q....
On exprime v_n en fonction de t_n en utilisant l'égalité $t_n = 160 - v_n$, soit $v_n = 160 - t_n$.

La suite t est géométrique de raison $0,25$.

b. On exprime d'abord t_n en fonction de n. Comme t est géométrique de premier terme $t_1 = 160 - v_1 = 160 - 120 = 40$ et de raison $q = 0,25$, on en déduit :

$$t_n = t_1 \times q^{n-1} = 40 \times 0,25^{n-1}$$

D'après la relation $t_n = 160 - v_n$, on en déduit : $v_n = 160 - t_n$, soit :

$$v_n = 160 - 40 \times 0,25^{n-1}$$

Un peu d'initiative

Pour obtenir v_n en fonction de n, on exprime t_n en fonction de n (on sait le faire car t est une suite géométrique) et comme on a une relation qui lie t_n et v_n, on aura v_n en fonction de n.

c. L'expression de v_n en fonction de n prouve que v_n sera toujours inférieur à 160, puisque $160 - 40 \times 0,25^{n-1} < 160$.

Explication

On enlève $40 \times 0,25^{n-1}$ à 160, donc $t_n < 160$. Plus n devient grand, plus cette quantité retranchée devient petite. Le bac va se remplir petit à petit mais n'atteindra jamais 160 litres.

On en déduit que le bac ne débordera jamais.

Exercice 4

1. $a_1 = \dfrac{(0+1) \times a_0 + 4}{0+2} = \dfrac{1 \times 10 + 4}{2} = 7.$

$a_2 = \dfrac{(1+1) \times a_1 + 4}{1+2} = \dfrac{2 \times 7 + 4}{3} = 6.$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 - a_0 = 7 - 10 = -3 \\ a_2 - a_1 = 6 - 7 = -1 \end{array}\right\} \text{ Ainsi, } a_1 - a_0 \neq a_2 - a_1$$

La suite a n'est donc pas arithmétique.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a_1}{a_0} = \dfrac{7}{10} \\ \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{6}{7} \end{array}\right\} \text{ Ainsi, } \frac{a_1}{a_0} \neq \frac{a_2}{a_1}$$

La suite a n'est donc pas géométrique.

2. $b_0 = (0+1) \times a_0 = 1 \times 10 = 10$
$b_1 = (1+1) \times a_1 = 2 \times 7 = 14$
$b_2 = (2+1) \times a_2 = 3 \times 6 = 18$

Que ce soit clair !

Ces calculs ne permettent pas de conclure que la suite b est arithmétique. Il faut prouver que ce résultat est vrai pour tous les entiers naturels n, c'est-à-dire montrer que $b_{n+1} = b_n + 4$.

On conjecture que b est une suite arithmétique de raison 4.

Pour tout entier naturel n :

$$\begin{array}{rcll} b_{n+1} & = & (n+1+1) \times a_{n+1} & \text{Car } b_n = (n+1) \times a_n. \\ & = & \cancel{(n+2)} \times \dfrac{(n+1) \times a_n + 4}{\cancel{n+2}} & \text{Car } a_{n+1} = \dfrac{(n+1) \times a_n + 4}{n+2}. \\ & = & \underbrace{(n+1) \times a_n}_{b_n} + 4 & \\ & = & b_n + 4 & \end{array}$$

Le principe

On part de b_{n+1} et on montre que $b_{n+1} = b_n + 4$.

On en déduit que b est une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $b_0 = 10$.

3. Comme b est une suite arithmétique de premier terme $b_0 = 10$ et de raison 4, on en déduit que pour tout entier naturel n :

$$b_n = b_0 + nr \quad \text{soit} \quad b_n = 10 + 4n$$

Comme $b_n = (n+1) \times a_n$, alors $a_n = \dfrac{b_n}{n+1}$, alors, pour tout entier naturel n :

$$a_n = \frac{10 + 4n}{n+1}$$

Bien comprendre

Cette relation est une autre écriture de la suite a. En remplaçant n par 0,1 ou 2, on retrouve les résultats de la première question. Essayez !

Exercice 5

1. **a.** Diminuer une quantité de 30 % revient à la multiplier par 0,7.
Comme la quantité de médicament diminue de 30 % chaque heure et que u_n désigne la quantité de médicament présent dans le sang n heures après l'injection, on obtient :

$$u_{n+1} = 0,7 \times u_n$$

La suite u est donc géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $0,7$.

Pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n est :

$$u_n = 2 \times (0,7)^n$$

b. La quantité de médicament présent dans le sang deux heures après l'injection est donnée par u_2.

$$u_2 = 2 \times 0,7^2 = 0,98$$

Il reste 0,98 ml de médicament dans le sang 2 heures après l'injection, donc moins de la moitié.

2. $u_5 = 2 \times 0,7^5 = 0,33614 > 0,2$.
Après 5 heures il reste encore plus de 0,2 ml de médicament. On ne peut pas procéder à une nouvelle injection.

3. Tableau complété :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
Valeur de u	2	1,4	0,98	0,686	0,480	0,336	0,235	0,165
Condition $u > d$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

En exécutant l'algorithme avec $d = 0,2$, la valeur affichée en fin d'algorithme est 7 , ce qui signifie qu'il faut attendre 7 heures avant d'effectuer une deuxième injection pour éviter l'overdose.