MATHEMATIQUES
Suites arithmétiques et géométriques : sujet d'entraînement 2 (corrigé)

Exercice 1

1. La suite (x_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}88$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- Expression de x_{n+1} en fonction de x_n : $x_{n+1} = q \times x_n = 0{,}88x_n$;
- Expression de x_n en fonction de n : $x_n = x_0 \times q^n = 60 \times 0{,}88^n$.

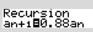
2. $S = (\text{premier terme}) \times \dfrac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q} = 60 \times \dfrac{1 - 0{,}88^{26}}{1 - 0{,}88} \simeq 481{,}99$ à 10^{-2} près.

Autre façon de faire

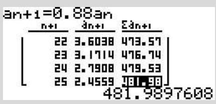
$$\begin{aligned}
S &= x_0 + x_1 + \dots\dots\dots\dots\dots + x_{25} \\
&= 60 + (60 \times 0,88) + (60 \times 0,88^2) + \dots\dots + (60 \times 0,88^{25}) \\
&= 60 \times (1 + 0,88 + 0,88^2 + \dots\dots + 0,88^{25}) \\
&= 60 \times \frac{1 - 0,88^{26}}{1 - 0,88} \qquad \text{Car } 1 + q + q^2 + \dots.. + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \\
&= \frac{60}{0,12} \times (1 - 0,88^{26}) \\
&= 500(1 - 0,88^{26}) \\
&= 481,99
\end{aligned}$$

Calculatrice

Dans le SETUP en faisant  puis , on choisit ON dans $\sum$ Display : Σ Display :On.

On entre la suite  avec le paramétrage 

, on obtient alors une troisième colonne qui donne la somme des termes :



Exercice 2

1. La suite (y_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1{,}2$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- Expression de y_{n+1} en fonction de y_n : $y_{n+1} = y_n + r = y_n + 1{,}2$;
- Expression de y_n en fonction de n : $y_n = y_0 + n\times = -5 + 1{,}2n$.

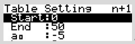
2. $S = (\text{nb de termes}) \times \dfrac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} = 51 \times \dfrac{y_0 + y_{50}}{2} = 51 \times \dfrac{-5 + \overbrace{(-5 + 50 \times 1{,}2)}^{=y_{50}}}{2} = 1275.$

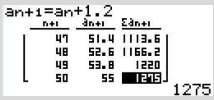
Autre façon de faire

$$
\begin{aligned}
S &= y_0 + y_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + y_{50} \\
&= -5 + (-5 + 1,2) + (-5 + 2 \times 1,2) + \ldots\ldots + (-5 + 50 \times 1,2) \\
&= \underbrace{(-5 + (-5) + \ldots. + (-5))}_{51 \times (-5)} + 1,2 \times (1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 50) \\
&= 51 \times (-5) + 1,2 \times \frac{50 \times 51}{2} \qquad \text{Car } 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \\
&= -255 + 1530 \\
&= 1275
\end{aligned}
$$

Calculatrice

Dans le SETUP en faisant  puis , on choisit ON dans $\sum$ Display :.

On entre la suite  avec le paramétrage , on obtient alors une troisième colonne qui donne la somme des termes :



Exercice 3

1. On montre que la suite v est géométrique en montrant que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = q \times v_n$.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$
\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 1 \\
&= 3u_n - 2 - 1 \\
&= 3u_n - 3 \quad \text{On réduit.} \\
&= 3(\underbrace{v_n + 1}_{u_n}) - 3 \quad \text{On remplace } u_n \text{ par } v_n + 1. \\
&= 3v_n + \cancel{3} - \cancel{3} \quad \text{On développe et réduit.} \\
&= 3v_n
\end{aligned}
$$

La suite v est donc géométrique de premier terme $v_1 = u_1 - 1 = 4 - 1 = 3$ et de raison 3.

Petit conseil

• Vous pouvez calculer rapidement quelques termes de cette suite pour conjecturer la raison de la suite (ici 3). Ainsi, vous savez d'où partir (de v_{n+1}) et vous savez où il faut arriver (à $3 \times v_n$).
• On exprime u_n en fonction de v_n en utilisant l'égalité $v_n = u_n - 1$, soit $u_n = v_n + 1$.

2. Puisque v est une suite géométrique de premier terme $v_1 = 3$ et de raison 3, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$$

Simplification

Ici, on peut simplifier l'écriture de v_n :
$3 \times 3^{n-1} = 3^1 \times 3^{n-1} = 3^{1+n-1} = 3^n$.

La relation $v_n = u_n - 1$ permet d'avoir u_n en fonction de v_n : $u_n = v_n + 1$.

Ainsi, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_n = 3^n + 1$$

Re petit conseil

Vous pouvez vérifier votre résultat en comparant les valeurs des premiers termes de u avec ceux (si vous avez fait l'efforts de le faire) trouvés en début d'exercice.

Exercice 4

1. **a.** T_3 est la somme dans la tirelire en 2017 :

   Dans la tirelire, on a :
   - 1 euro déposé en 2014 ;
   - 2 euros déposés en 2015 ;
   - 4 euros déposés en 2016 ;
   - 8 euros déposés en 2017 ;

   Ainsi, $T_3 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$.

   b. Soit u_n la somme déposée à l'année $2014 + n$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.
   La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$T_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = \frac{1-2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1} - 1$$

   Autrement

   $u_0 + u_1 + ... + u_n = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = \dfrac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1$.

   Quand Nathaël aura 18 ans, il disposera d'un capital de $T_{18} = 2^{19} - 1 = 524287$ €.

   Or 149 motos à 3500 € coûtent $149 \times 3500 = 521500 < 524287$.

   Le père de Nathaël a donc raison bien qu'il ne dispose ni d'une telle somme, ni d'un garage assez grand !!

2. Soit n l'âge de GM.
   On cherche la valeur de n telle que $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = 1\,225$.

   $$\begin{aligned}1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = 1\,081 &\iff \frac{n(n+1)}{2} = 1\,225 \\ &\iff n^2 + n = 2\,450 \\ &\iff n^2 + n - 2\,450 = 0\end{aligned}$$

   On résout cette équation à l'aide du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \times 1 \times (-2\,450) = 9\,801 > 0$.

   Cette équation admet donc deux solutions :

   $$n_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-99}{2} = -50 < 0 \qquad n_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\frac{-1+99}{2} = 49 > 0$$

   L'âge de GM est de 49 ans.

Exercice 5

1. P est une fonction polynôme du second degré. Pour résoudre $P(x) = 0$, on calcule le discriminant Δ.
   $\Delta = 9^2 - 4 \times 1 \times (-4140) = 16641 = 129^2$.
   On en déduit que l'équation admet deux solutions distinctes :

   $$x_1 = \frac{-9+129}{2} = 60 \text{ et } x_2 = \frac{-9-129}{2} = -69$$

   $\mathscr{S} = \{-69\ ;\ 60\}$.

2. **a.** On a $u_1 = 1000$, $u_2 = 1200$, $u_3 = 1400$, $u_4 = 1600$ et $u_5 = 1800$.

   b. Le prix augmente de 200 € pour chaque mètre supplémentaire creusé. Comme u_n désigne le coût du n-ième mètre creusé, on a pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

   $$u_{n+1} = u_n + 200$$

   On en déduit que la suite u est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 1000$ et de raison 200.

   Remarque

   La suite (u_n) est **arithmétique** car on ajoute toujours le même nombre (200) pour passer d'un terme à son suivant.

Donc pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 + (n-1)r \\ &= 1000 + 200(n-1) \\ &= 800 + 200n \end{aligned}$$

Attention

Ici, le premier terme de la suite est u_1.
Pour une suite u arithmétique de raison r, on a pour tous entiers naturels p et n, $u_n = u_p + (n-p)r$. On applique ce résultat avec $p = 1$ et on obtient :

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

c. S_n représente le coût total. Ainsi, $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \ldots + u_n \\ &= n \times \frac{u_1 + u_n}{2} \\ &= n \times \frac{1000 + 800 + 200n}{2} \\ &= 900n + 100n^2 \end{aligned}$$

Autre façon de faire

$$\begin{aligned} S &= u_1 + u_2 + ... + u_n \\ &= 1000 + (1000+200) + (1000 + 2 \times 200) + ... + (1000 + (n-1) \times 200) \\ &= \underbrace{(1000 + 1000 + ... + 1000)}_{1000 \times n} + 200 \times (1 + 2 + 3 + ... + (n-1)) \\ &= n \times 1000 + 200 \times \frac{n \times (n-1)}{2} \qquad \text{Car } 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \\ &= 1000n + 100n(n-1) \\ &= 900n + 100n^2 \end{aligned}$$

d. On cherche n tel que $100n^2 + 900n = 414000$.

Cette équation est équivalente à $n^2 + 9n - 4140 = 0$.
D'après la question **1.** cette équation a deux solutions : -69 et 60. On en déduit que la profondeur maximale du forage que l'on peut réaliser est de **60 mètres**.

Exercice 6

1. a. Diminuer une quantité de 2% revient à la multiplier par $1 - 0,02 = 0,98$.
Tous les ans, la production diminue de 2 %. On en déduit que $U_{n+1} = 0,98U_n$.
Par conséquent, la suite U est bien une suite géométrique. Sa raison est 0,98.

b. $U_n = 120000 \times 0,98^n$.

2. Le nombre de jouets fabriqués en 2005 est donné par U_5.

$U_5 = 108470$. Le nombre de jouets fabriqués en 2005 est 108470.

3. a. $1 + 0,98 + 0,98^2 + \cdots + 0,98^n = \dfrac{1 - 0,98^{n+1}}{1 - 0,98}$.

b.

$$\begin{aligned} S_n &= U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n \\ &= U_0 + U_0 \times 0,98 + U_0 \times 0,98^2 + ... + U_0 \times 0,98^n \\ &= U_0 \times (1 + 0,98 + 0,98^2 + \cdots + 0,98^n) \\ &= 120000 \times \frac{1 - 0,98^{n+1}}{1 - 0,98} \\ &= \frac{120000}{0,02} \times (1 - 0,98^{n+1}) \\ &= 6000000(1 - 0,98^{n+1}) \end{aligned}$$

4. $S_{14} = 1568585$.
Durant les 15 premières années de production, le nombre de jouets fabriqués est 1 568 585.

5. Algorithme complété :

$U \longleftarrow 120000$
$S \longleftarrow 0$
Pour N allant de 1 à 15
$S \longleftarrow S + U$
$U \longleftarrow 0,98 \times U$
Fin Pour