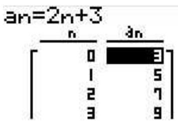
MATHEMATIQUES

Suites arithmétiques et géométriques : entraînement savoir-faire 1 (corrigé)

Exercice 1

a. En utilisant une calculatrice, on obtient les premiers termes :



Que ce soit clair !

Ces calculs ne permettent pas de conclure que la suite u est arithmétique. Il faut prouver que ce résultat est vrai pour tous les entiers naturels n, c'est-à-dire montrer que $u_{n+1} = u_n + 2$.

On conjecture que u est une suite arithmétique (si, si, regardez bien !).

On calcule $u_{n+1} - u_n$ et on montre que cette différence est constante (c'est-à-dire indépendante de n).

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (2(n+1)+3) - (2n+3) \\ &= (2n+5) - (2n+3) \\ &= 2n+5-2n-3 \\ &= 2 \quad \text{Indépendant de } n. \end{aligned}$$

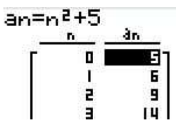
Autrement

Toute suite u définie par une relation du type $u_n = a + bn$ est une suite arithmétique de raison b et de premier terme a.

On a donc bien pour tous les entiers naturels n : $u_{n+1} = u_n + 2$.

La suite u est donc arithmétique de raison 2.

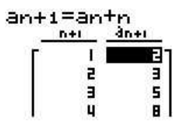
b. En utilisant une calculatrice, on obtient les premiers termes :



$$\left.\begin{aligned} v_1 - v_0 &= 6 - 5 = -1 \\ v_2 - v_1 &= 9 - 6 = 3 \end{aligned}\right\} \text{Ainsi, } v_1 - v_0 \neq v_2 - v_1$$

La suite v n'est donc pas arithmétique.

c. En utilisant une calculatrice, on obtient les premiers termes :
Attention le premier terme de la suite est w_1.
Veillez à bien paramétrer votre SETUP.
Le calcul "à la main" de w_2 est :
$w_2 = w_1 + 1 = 2 + 1 = 3$, et celui de w_3 :
$w_3 = w_2 + 2 = 3 + 2 = 5$.



$$\left.\begin{aligned} w_2 - w_1 &= 3 - 2 = -1 \\ w_3 - w_2 &= 5 - 3 = 2 \end{aligned}\right\} \text{Ainsi, } w_2 - w_1 \neq w_3 - w_2$$

La suite w n'est donc pas arithmétique.

Exercice 2

1. L'expression de u_n en fonction de n est donnée par $u_n = u_0 + nr$, soit $u_n = 5 - 8n$.

2. On reconnaît la formule de récurrence d'une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison 7, ainsi, $u_n = 4 - 7n$.

Exercice 3

1. Calcul de la somme S :

$$\begin{aligned}
S &= w_0 + w_1 + \ldots\ldots + w_{20} \\
&= 17 + (17+3) + (17+2\times 3) + \ldots\ldots + (17 + 20\times 3) \\
&= \underbrace{(17+17+\ldots..+17)}_{=21\times 17} + 3\times(1+2+\ldots.+20) \\
&= 21\times 17 + 3\times \frac{21\times 20}{2} \\
&= 357 + 630 \\
&= 987
\end{aligned}$$

Somme

N'oubliez pas :

$$1+2+3+\ldots\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Autre façon de faire

On utilise le résultat suivant :
La somme S de plusieurs termes consécutifs d'une suite arithmétique est telle que :

$$S = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} \ + \ \text{dernier terme}}{2}$$

Dans notre cas, le premier terme est $w_0 = 17$, le dernier terme est obtenu grâce à la formule $w_n = w_0 + nr$ soit $w_{20} = 17 + 20\times 3 = 77$.
Comme il y a 21 termes dans cette somme, on obtient : $21 \times \dfrac{17+77}{2} = 987$.

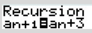
Calculatrice

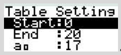
Dans le SETUP en faisant 

puis 

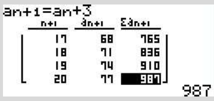
, on choisit ON dans $\sum$ Display :

.

On entre la suite 

avec le paramétrage 

, on obtient alors une troisième colonne qui donne la somme des termes :



2. Calcul de la somme S :

$$\begin{aligned}
S &= 4 + 14 + 24 + \ldots.. + 284 \\
&= 4 + (4+10) + (4+2\times 10) + \ldots\ldots + (4+28\times 10) \\
&= \underbrace{(4+4+\ldots..+4)}_{=29\times 4} + 10\times(1+2+\ldots.+28) \\
&= 29\times 4 + 10\times\frac{29\times 28}{2} \\
&= 116 + 4060 \\
&= 4176
\end{aligned}$$

Essayez

Essayez de retrouver ce résultat avec les autres méthodes.

Exercice 4

1. u_{n+1} est le nombre d'éolienne l'année qui suit $(2005+n)$. Cette année-là il y en a u_n et on sait que tous les ans, il y a 500 éoliennes supplémentaires.
On a donc :

$$u_{n+1} = u_n + 500$$

On reconnaît la relation de récurrence d'une suite arithmétique de raison 500.

2. u_{20} est le nombre d'éoliennes en 2025.

Comme (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 940$ et de raison $r = 500$, on a :

$$u_n = u_0 + nr = 940 + 500n$$

$u_{20} = 940 + 500 \times 20 = 10940$.
Il y aura 10 940 éoliennes en France en 2025 suivant ce modèle.

Méthode

N'oubliez pas que u_n est le nombre d'éoliennes en $2005 + n$. Il s'agit donc dans cette question de calculer u_n pour une valeur particulière de n. Cette valeur est déterminée par l'année 2025.
On a $2025 = 2005 + 20$, donc le nombre d'éoliennes en 2025 est donnée par u_{20}.
Pour calculer ce nombre, on a deux possibilités :
- la calculatrice (menu RECUR ....) ;
- en utilisant l'expression explicite de la suite arithmétique dont on connaît le premier terme et la raison.

Exercice 5

1. Comme u_n désigne le nombre de km parcourus par Nabolos la n-ième semaine et que chaque semaine, ce nombre de km augmente de 5 km, on a pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_{n+1} = u_n + 5$$

Cela signifie que (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 40$ et de raison $r = 5$.

2. La distance parcourue la 18 ième semaine est donnée par u_{18}.

Pour déterminer cette valeur, on utilise la forme explicite de la suite u :

$$u_n = u_1 + (n-1)r = 40 + (n-1) \times 5 = 35 + 5n$$

Formule

Pour une suite arithmétique u, on a pour tout entier naturel n et p : $u_n = u_p + (n-p)r$.
En particulier pour $p = 1$, on a : $u_n = u_1 + (n-1)r$.

Ainsi, $u_{18} = 35 + 5 \times 5 = 60$.

La 18 ième semaine, Nabolos va parcourir 60 km.