

MATHEMATIQUES
Suites arithmétiques et géométriques : entraînement savoir-faire 2 (corrigé)

Exercice 1

a. Les premiers termes sont obtenus avec la calculatrice :

$$a_n = 3 \times 2^{n+1}$$

| n | 3n |
|---|----|
| 0 | 6 |
| 1 | 12 |
| 2 | 24 |
| 3 | 48 |

On conjecture que la suite est géométrique de raison 2.

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= 3 \times 2^{n+1+1} && \text{On remplace } n \text{ par } n + 1 \text{ dans } u_n. \\
 &= 3 \times \underbrace{2^{n+2}}_{=2 \times 2^{n+1}} \\
 &= 3 \times 2 \times 2^{n+1} \\
 &= 2 \times \underbrace{3 \times 2^{n+1}}_{=u_n} \\
 &= 2 \times u_n
 \end{aligned}$$

L'idée

L'idée, c'est de partir de u_{n+1} et de montrer que u_{n+1} s'écrit en fonction de u_n sous la forme $u_{n+1} = q \times u_n$ (caractéristique des suites géométriques). En plus si le nombre q existe, on sait combien il vaut. On devrait pouvoir se débrouiller !

On en déduit que u est une suite géométrique de raison 2.

b. Les premiers termes sont obtenus avec la calculatrice :

$$a_n = -2 \div 5^n$$

| n | 3n |
|---|--------|
| 0 | -2 |
| 1 | -0.4 |
| 2 | -0.08 |
| 3 | -0.016 |

On conjecture que la suite v est géométrique de raison 0,5. Si, si, faites les calculs !

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= -\frac{2}{5^{n+1}} && \text{On remplace } n \text{ par } n + 1 \text{ dans } u_n. \\
 &= -\frac{2}{5 \times 5^n} && \text{Car } 5^{n+1} = 5 \times 5^n. \\
 &= \frac{1}{5} \times \underbrace{-\frac{2}{5^n}}_{=v_n} \\
 &= \frac{1}{5} v_n
 \end{aligned}$$

On en déduit que v est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5} = 0,2$.

c. Les premiers termes sont obtenus avec la calculatrice :

$$a_{n+1} = -a_n + 3$$

| n+1 | 3n+1 |
|-----|------|
| 0 | -4 |
| 1 | 7 |
| 2 | -4 |
| 3 | 7 |

$$\left. \begin{aligned} \frac{w_1}{w_0} &= \frac{7}{-4} \\ \frac{w_2}{w_1} &= \frac{-4}{7} \end{aligned} \right\} \text{Ainsi, } \frac{w_1}{w_0} \neq \frac{w_2}{w_1}$$

La suite n'est donc pas géométrique.

Suite particulière

Cette suite ne prend que deux valeurs 7 et -4.

Exercice 2

- L'expression de u_n en fonction de n est $u_n = u_0 \times q^n = -2 \times 0,6^n$.
- On reconnaît la forme récurrente d'une suite géométrique de premier terme $u_1 = -3$ et de raison 4.

Ainsi,

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 \times q^{n-1} \\ &= -3 \times 4^{n-1} \end{aligned}$$

Attention

Ici, le premier terme de la suite est u_1 .
Pour une suite u géométrique de raison q , on a pour tous entiers naturels p et n , $u_n = u_p \times q^{n-p}$. On applique ce résultat avec $p = 1$ et on obtient :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

Exercice 3

Calcul de la somme :

$$\begin{aligned} S &= w_0 + w_1 + \dots + w_{10} \\ &= 100 + (100 \times 0,9) + (100 \times 0,9^2) + \dots + (100 \times 0,9^{10}) \\ &= 100 \times (1 + 0,9 + 0,9^2 + \dots + 0,9^{10}) \\ &= 100 \times \frac{1 - 0,9^{11}}{1 - 0,9} \\ &= \frac{100}{0,1} \times (1 - 0,9^{11}) \\ &= 1000(1 - 0,9^{11}) \\ &= 686,2 \end{aligned}$$

Autre façon de faire

On utilise le résultat suivant :

La somme S de plusieurs termes consécutifs d'une suite géométrique est telle que :

$$S = (\text{1}^{\text{er}} \text{ terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Dans notre cas, le premier terme est $w_0 = 100$ et il y a 11 termes dans cette somme. Ainsi, on obtient :

$S = 100 \times \frac{1 - (0,9)^{11}}{1 - 0,9}$ ce qui correspond exactement au même calcul que précédemment.

Calculatrice

Dans le SETUP en faisant **SHIFT** puis **SET UP**, on choisit ON dans \sum Display : **Display : 10M**.

On entre la suite **Recursion** avec le paramétrage **Start: 10**, **End: 110**, **an: 100**, on obtient alors une troisième colonne qui donne la somme des termes :

| an+1=0,9an | an | Σan |
|------------------------------------|------------------------------------|--------------------------|
| 100 | 100 | 100 |
| 90 | 90 | 190 |
| 81 | 81 | 271 |
| 72,9 | 72,9 | 343,9 |
| 65,61 | 65,61 | 409,51 |
| 59,049 | 59,049 | 470,558 |
| 53,1441 | 53,1441 | 527,7021 |
| 47,82969 | 47,82969 | 581,53179 |
| 43,046721 | 43,046721 | 632,57851 |
| 38,7420489 | 38,7420489 | 680,8205589 |
| 34,86784401 | 34,86784401 | 726,258402909 |
| 31,381059609 | 31,381059609 | 768,84046251809 |
| 28,2429536481 | 28,2429536481 | 808,5975088661809 |
| 25,41865828329 | 25,41865828329 | 845,5161671494709 |
| 22,876792454961 | 22,876792454961 | 879,792959604431809 |
| 20,5891132094649 | 20,5891132094649 | 911,582072813896709 |
| 18,53020188851841 | 18,53020188851841 | 940,91227470241511809 |
| 16,677181700666569 | 16,677181700666569 | 967,78945640308172709 |
| 15,009463530600912 | 15,009463530600912 | 992,2989199336826361809 |
| 13,508517177140821 | 13,508517177140821 | 1014,5074371108234551809 |
| 12,157665459426739 | 12,157665459426739 | 1034,3650015702467641809 |
| 10,941898913484065 | 10,941898913484065 | 1051,8068904837307731809 |
| 9,847709022135659 | 9,847709022135659 | 1066,9545995058663821809 |
| 8,862938119922093 | 8,862938119922093 | 1079,8175376257862911809 |
| 7,976644307930884 | 7,976644307930884 | 1090,3948963337171801809 |
| 7,178980877137795 | 7,178980877137795 | 1108,7738771508548751809 |
| 6,461082789424016 | 6,461082789424016 | 1124,9548899399923841809 |
| 5,815074510481614 | 5,815074510481614 | 1139,9389247504184931809 |
| 5,233567059433453 | 5,233567059433453 | 1153,7258917098368021809 |
| 4,710166353089108 | 4,710166353089108 | 1166,3157928269260111809 |
| 4,247149717780197 | 4,247149717780197 | 1177,7086381047061201809 |
| 3,838434746002177 | 3,838434746002177 | 1187,9044076516842291809 |
| 3,47859127140196 | 3,47859127140196 | 1196,8931983781803381809 |
| 3,161727144261764 | 3,161727144261764 | 1204,6749115044064471809 |
| 2,881554430835588 | 2,881554430835588 | 1211,2494571295715561809 |
| 2,633403087752029 | 2,633403087752029 | 1216,6168552173736651809 |
| 2,412062779976826 | 2,412062779976826 | 1220,7769061973461741809 |
| 2,213856501979143 | 2,213856501979143 | 1223,7296586993202831809 |
| 2,036270851781229 | 2,036270851781229 | 1225,4751127222953921809 |
| 1,877043766603106 | 1,877043766603106 | 1226,0132683755715011809 |
| 1,733739389942795 | 1,733739389942795 | 1225,4441256492476101809 |
| 1,604725450948516 | 1,604725450948516 | 1223,7676845243067191809 |
| 1,488432966354164 | 1,488432966354164 | 1221,0849450008588281809 |
| 1,383190120719348 | 1,383190120719348 | 1217,3959080779139371809 |
| 1,287511113667413 | 1,287511113667413 | 1212,6995737554720461809 |
| 1,200019902262872 | 1,200019902262872 | 1207,0059020325261551809 |
| 1,120018812038625 | 1,120018812038625 | 1200,4148929100862641809 |
| 1,047017929934783 | 1,047017929934783 | 1192,9255453871403731809 |
| 9,80017336941525 | 9,80017336941525 | 1184,5278714567254821809 |
| 9,20016479693149 | 9,20016479693149 | 1175,3218766607945911809 |
| 8,640157357684801 | 8,640157357684801 | 1165,3075619083497001809 |
| 8,112152868760561 | 8,112152868760561 | 1154,4849271895888091809 |
| 7,61414942531253 | 7,61414942531253 | 1142,85398249540391809 |
| 7,144146043046877 | 7,144146043046877 | 1130,4147278269050271809 |
| 6,700142722853431 | 6,700142722853431 | 1117,1681632840061361809 |
| 6,280139462732248 | 6,280139462732248 | 1103,1142988676072451809 |
| 5,883136262673024 | 5,883136262673024 | 1088,2530345777083541809 |
| 5,507133122675682 | 5,507133122675682 | 1072,5843704153094631809 |
| 5,15013004274003 | 5,15013004274003 | 1056,1083063804105721809 |
| 4,810128022766077 | 4,810128022766077 | 1038,8248424730116811809 |
| 4,485127062753673 | 4,485127062753673 | 1020,7329786931127901809 |
| 4,173127162702729 | 4,173127162702729 | 1001,8327151407139001809 |
| 3,873128322613285 | 3,873128322613285 | 982,1240518158150091809 |
| 3,584130542484341 | 3,584130542484341 | 961,6079887184161181809 |
| 3,305133822315397 | 3,305133822315397 | 940,2845258475172271809 |
| 3,035138162106453 | 3,035138162106453 | 918,1536632051183361809 |
| 2,773143561857509 | 2,773143561857509 | 895,2154007922194451809 |
| 2,518149921668565 | 2,518149921668565 | 871,4797386093205541809 |
| 2,269157241539621 | 2,269157241539621 | 846,9466766564216631809 |
| 2,035165521470677 | 2,035165521470677 | 821,6162149335227721809 |
| 1,805174761361733 | 1,805174761361733 | 795,4883534406238811809 |
| 1,588184961312789 | 1,588184961312789 | 768,5630921877250001809 |
| 1,383196121223845 | 1,383196121223845 | 740,8404311748261091809 |
| 1,189207241094901 | 1,189207241094901 | 712,3203704019272181809 |
| 1,005218320925957 | 1,005218320925957 | 683,0029098690283271809 |
| 0,831229360816013 | 0,831229360816013 | 652,8880495771294361809 |
| 0,667240360765069 | 0,667240360765069 | 622,0757895252305451809 |
| 0,513251320674125 | 0,513251320674125 | 590,5661296133316541809 |
| 0,369262240543181 | 0,369262240543181 | 558,3590698404327631809 |
| 0,235273120372237 | 0,235273120372237 | 525,4546092065338721809 |
| 0,111284000201293 | 0,111284000201293 | 491,8527487126349811809 |
| 0,056294880030349 | 0,056294880030349 | 457,5534883687360901809 |
| 0,0273057600151745 | 0,0273057600151745 | 422,5568280748371991809 |
| 0,01365288000758725 | 0,01365288000758725 | 386,8627678409383081809 |
| 0,006826440003793625 | 0,006826440003793625 | 350,4704076570394171809 |
| 0,0034132200018968125 | 0,0034132200018968125 | 314,2798475231405261809 |
| 0,00170661000094840625 | 0,00170661000094840625 | 278,2900874392416351809 |
| 0,000853305000474203125 | 0,000853305000474203125 | 242,5011274053427441809 |
| 0,0004266525002371015625 | 0,0004266525002371015625 | 206,9121674214438531809 |
| 0,00021332625011855078125 | 0,00021332625011855078125 | 171,5232074375449621809 |
| 0,000106663125059275390625 | 0,000106663125059275390625 | 136,3342474536460711809 |
| 0,0000533315625296376953125 | 0,0000533315625296376953125 | 101,3452874697471801809 |
| 0,00002666578126481884765625 | 0,00002666578126481884765625 | 66,5563274858482891809 |
| 0,000013332890632409423828125 | 0,000013332890632409423828125 | 31,9673675019493981809 |
| 0,0000066664453162047119140625 | 0,0000066664453162047119140625 | 15,4784075180505071809 |
| 0,00000333322265810235595703125 | 0,00000333322265810235595703125 | 7,739203759025253641809 |
| 0,000001666611329051177978515625 | 0,000001666611329051177978515625 | 3,869601879512626821809 |
| 0,0000008333056645255889892578125 | 0,0000008333056645255889892578125 | 1,934800939756313411809 |
| 0,00000041665283226279449462890625 | 0,00000041665283226279449462890625 | 0,9674004698781567059045 |

Exercice 4

- Diminuer une quantité de 2 % revient à la multiplier par : $1 - 0,02 = 0,98$.

- En 2001 :
Entre 2000 et 2001, le nombre de boîtes a diminué de 2 %.
Le nombre de boîtes d'antibiotiques est donc donné par :

$$192 \times 0,98 = 188,16$$

Coefficient multiplicateur

Enlever 2 % à x revient à calculer $x - \underbrace{0,02x}_{2\% \text{ de } x} = 0,98x$.

0,98 est le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 2 %. On le calcule par la formule $CM = 1 + T$. Ici $T = -0,02$.

En 2001, selon ce modèle, le nombre de boîtes d'antibiotiques vendues est 188 160 000.

- En 2002 :

Selon le même principe, le nombre de boîtes d'antibiotiques vendues est donné par :

$$188,16 \times 0,98 = 184,3968$$

En 2002, selon ce modèle, le nombre de boîtes d'antibiotiques vendues est environ 184 397 000.

2. Comme la baisse de 2 % se poursuit tous les ans selon ce modèle, on en déduit que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,98u_n$$

La suite est donc géométrique de raison 0,98.

3. u_{30} est le nombre de boîtes d'antibiotiques vendues en 2030 selon ce modèle.

Comme (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 192$ et de raison $q = 0,98$, on a :

$$u_n = u_0 \times q^n = 192 \times 0,98^n$$

$$u_{30} = 192 \times 0,98^{30} \simeq 104,733.$$

Il y aura 104 733 000 boîtes d'antibiotiques vendues en France en 2030 selon ce modèle.

Méthode

N'oubliez pas que u_n est le nombre de boîtes d'antibiotiques vendues en France en $2000 + n$. Il s'agit donc dans cette question de calculer u_n pour une valeur particulière de n . Cette valeur est déterminée par l'année 2030.

On a $2030 = 2000 + 30$, donc le nombre de boîtes d'antibiotiques vendues en France est donnée par u_{30} .

Pour calculer ce nombre, on a deux possibilités :

- la calculatrice (menu RECUR ...);
- en utilisant l'expression explicite de la suite géométrique dont on connaît le premier terme et la raison.

Exercice 5

1. Augmenter une quantité de 2,5 % revient à la multiplier par $1 + 0,025 = 1,025$.

$$u_1 = 1,025 \times 21600 = 22140.$$

Coefficient multiplicateur

Augmenter x de 2,5 % revient à calculer $x + \underbrace{0,025x}_{2,5\% \text{ de } x} = 1,025x$.

1,025 est le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 2,5 %. On le calcule par la formule $CM = 1 + T$. Ici $T = +0,025$.

2. Comme l'augmentation est toujours de 2,5 % d'une année sur l'autre, on a pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 1,025 \times u_n$$

On en déduit que la suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 21600$ et de raison $q = 1,025$.

3. a. Le salaire de cet employé en 2018 est donné par u_{18} .

On calcule u_{18} en utilisant l'écriture explicite.

Pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

$$\text{Ainsi, } u_{18} = 21600 \times 1,025^{18} \simeq 33689.$$

Formule

Pour une suite géométrique u , on a pour tout entier naturel n et p : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Par exemple, pour $p = 1$, on a : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

Le salaire de cet employé au bout de 18 ans est de 33 689 €.

- b. Le double de 21 600 euros est 43 200 euros. En utilisant la calculatrice, on obtient :

| | |
|-------|--------|
| $n+1$ | $3n+1$ |
| 27 | 42072 |
| 28 | 43124 |
| 29 | 44202 |
| 30 | 45307 |

29

FORM OEL WEB G-COM G-FLT

D'après le tableau, dans 29 ans le salaire de cet employé aura doublé.