MATHEMATIQUES
Comportement global d'une suite : entraînement (corrigé)

Exercice 1

1. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 2n + 1$.

Or $2n+1 > 0$. Par conséquent la suite u est strictement croissante.

Explication

C'est le signe de $u_{n+1} - u_n$ qui donne le sens de variation d'une suite.
Ici, en retranchant u_n dans chaque membre de l'égalité $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$, on obtient le résultat souhaité.

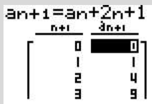
2. On a $u_0 = 0$.

$u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 1 = 0 + 1 = 1.$

$u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 4.$

$u_3 = u_2 + 2 \times 2 + 1 = 4 + 4 + 1 = 9.$

Calculatrice



On conjecture que pour tout entier naturel n,

$$u_n = n^2$$

Pour aller plus loin

En vérifiant que cette conjecture est vraie pour $n = 0$ (en effet, $0^2 = 0$) et en supposant que celle-ci soit vraie pour un certain entier n, on a pour cet entier :

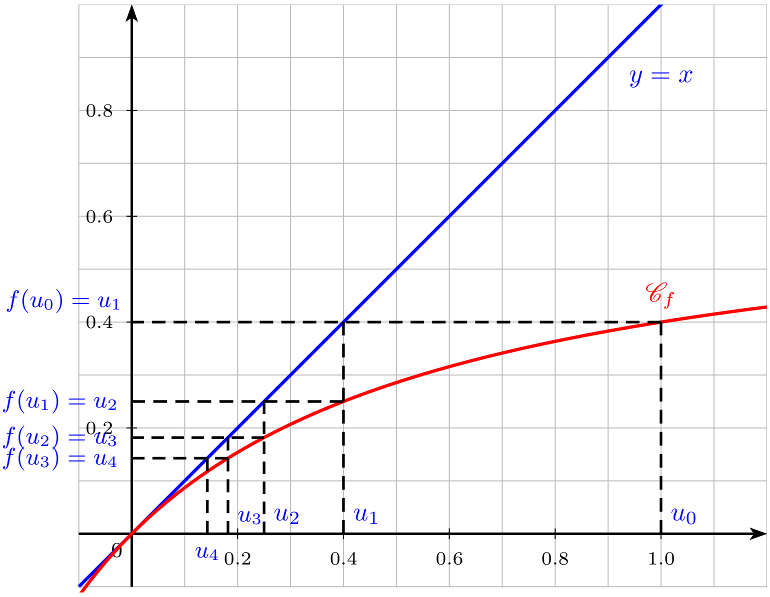
$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Autrement dit, la propriété est vérifiée pour l'entier $(n+1)$, puisque $u_{n+1} = (n+1)^2$.
Ce résultat permet de prouver que la relation est vraie pour tout les entiers n. C'est une démonstration qui sera étudiée en, terminale. Elle porte le nom de démonstration par récurrence.

Exercice 2

- Partie A -

On a $f(u_n) = \dfrac{2u_n}{2+3u_n} = u_{n+1}$. On en déduit que la fonction f est bien la fonction associée à la suite u.



D'après ce graphique, on conjecture que la suite u est décroissante et que u converge vers 0.

- Partie B -

1. a. $\boldsymbol{u_1} = \dfrac{2u_0}{2+3u_0} = \mathbf{\dfrac{2}{5}}$,

$\boldsymbol{u_2} = \dfrac{2u_1}{2+3u_1} = \dfrac{2\times\frac{2}{5}}{2+3\times\frac{2}{5}} = \mathbf{\dfrac{1}{4}}$,

$\boldsymbol{u_3} = \dfrac{2u_2}{2+3u_2} = \dfrac{2\times\frac{1}{4}}{2+3\times\frac{1}{4}} = \mathbf{\dfrac{12}{11}}$.

b. $u_1 - u_0 = -\dfrac{3}{5}$ et $u_2 - u_1 = -\dfrac{3}{20}$, donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$. Par conséquent **la suite n'est pas arithmétique**.
$\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{2}{5}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{5}{8}$, donc $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$. Par conséquent, **la suite n'est pas géométrique**.

2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n}{2+3u_n} - u_n = \dfrac{2u_n - u_n(2+3u_n)}{2+3u_n} = \dfrac{-3u_n^2}{2+3u_n} < 0$, compte tenu que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On en déduit que la suite $\boldsymbol{(u_n)}$ **est décroissante**.

> **Attention !**
> Les variations de la fonction f ne donnent pas le sens de variation de la suite (u_n).

3. a. $\boldsymbol{v_0} = 1 + \dfrac{2}{u_0} = \mathbf{3}$,

$\boldsymbol{v_1} = 1 + \dfrac{2}{u_1} = 1 + 2\times\dfrac{5}{2} = \mathbf{6}$,

$\boldsymbol{v_2} = 1 + \dfrac{2}{u_2} = 1 + 2\times 4 = \mathbf{9}$.

> **Vocabulaire**
> C'est une conjecture. Encore une fois, si cela semble vrai pour les premiers termes, il faut le démontrer pour tous les termes. D'où le calcul littéral !

Il semble que cette suite soit **arithmétique** de raison 3.

b. On exprime pour tous les entiers naturels n, v_{n+1} en fonction de v_n :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= 1+\frac{2}{u_{n+1}} \\
&= 1+\frac{2}{\dfrac{2u_n}{2+3u_n}} \\
&= 1+2\times\frac{2+3u_n}{2u_n} \quad \text{Diviser, cela revient à multiplier par l'inverse.} \\
&= \frac{2+4u_n}{u_n} \\
&= \frac{2}{u_n}+\frac{4\cancel{u_n}}{\cancel{u_n}} \\
&= 4+\frac{2}{u_n} \\
&= 3+\underbrace{1+\frac{2}{u_n}}_{v_n} \\
&= 3+v_n
\end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est **arithmétique** de premier terme $v_0=3$ et de raison 3.

4. On en déduit que $\boldsymbol{v_n = v_0 + nr = 3+3n}$.

$$\begin{aligned}
v_n &= 1+\frac{2}{u_n} \\
v_n-1 &= \frac{2}{u_n} \\
\frac{1}{v_n-1} &= \frac{u_n}{2} \\
u_n &= 2\times\frac{1}{v_n-1} \\
u_n &= \frac{2}{v_n-1}
\end{aligned}$$

Explications

On exprime u_n en fonction de v_n grâce à l'égalité $v_n = 1+\dfrac{2}{u_n}$. Comme on a déjà v_n en fonction de n, on aura u_n en fonction de n.

Comme $v_n = 3+3n$, on obtient pour tout entier naturel n : $u_n = \dfrac{2}{3+3n-1} = \dfrac{2}{2+3n}$.

5. On conjecture que la limite de la suite est 0. En effet, plus n prend des grandes valeurs, plus u_n prend des valeurs qui se rapprochent de 0.

Exercice 3

1. On a $u_n = f(n)$ avec f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+4}$.

Sens de variation

Pour les suites définies de manière explicite, le sens de variation de la fonction sur $[0\ ;\ +\infty[$ donne le sens de variation de la suite. Attention, cela n'est pas vrai pour les suites définies de manière récurrente.

La fonction f est un quotient de deux fonctions.

On utilise la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u(x)=2x-3$ et $v(x)=x+4$.

Remarque

$u'(x)=2$ et $v'(x)=1$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\overbrace{2}^{u'(x)} \times \overbrace{(x+4)}^{v(x)} - \overbrace{(2x-3)}^{u(x)} \times \overbrace{1}^{v'(x)}}{\underbrace{(x+4)^2}_{(v(x))^2}} \\
&= \frac{2x+8-(2x-3)}{(x+4)^2} \\
&= \frac{\cancel{2x}+8-\cancel{2x}+3}{(x+4)^2} \\
&= \frac{11}{(x+4)^2}
\end{aligned}
$$

La fonction dérivée est strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$, ainsi f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
On peut donc affirmer que u est strictement croissante.

Plus long

L'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$ est plus longue. Vous pouvez essayer :-)

Réponse : a.

2. La suite u est une suite géométrique puisque sa formule de récurrence est de la forme $u_{n+1} = q \times u_n$ avec $q = \dfrac{3}{2}$.

Sa raison est strictement supérieure à 1 et son premier terme est strictement positif, elle est donc croissante.

Réponse : a.

Pensez-y !

Le signe du premier terme de la suite géométrique est important.

En effet dans notre cas, on a $u_n = 5 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.

La suite $\left(\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\right)$ est croissante. En multipliant par un nombre strictement positif, on ne change pas le sens de variation. Ainsi u est croissante.

3. On a une suite du type $u_n = f(n)$ avec f définie par $f(x) = \dfrac{3}{x} - 1$.
Le sens de variation de cette fonction sur $]0\ ;\ +\infty[$ donne le sens de variation de la suite associée.

- $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$
- $x \longmapsto 3 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{x}$ est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$
- $x \longmapsto \dfrac{3}{x} - 1$ est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Fonctions associées

u et $k \times u$ ont le même sens de variation si $k > 0$ et u et $u + k$ ont le même sens de variations. Vous pouvez également calculer la dérivée qui est très simple !

Ainsi u est décroissante.
Réponse : b.

Exercice 4

1. En calculant les premiers termes on obtient :

n	un
0	5
1	3
2	1
3	-1

On conjecture que u est une suite arithmétique (si, si, regardez bien !).

On calcule $u_{n+1} - u_n$ et on montre que cette différence est constante (c'est-à-dire indépendante de n).

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} - u_n & = & (5 - 2(n+1)) - (5 - 2n) \\ & = & (5 - 2n - 2) - (5 - 2n) \\ & = & 3 - 2n - 5 + 2n \\ & = & -2 \end{array}$$

Autrement

Toute suite u définie par une relation du type $u_n = a + bn$ est une suite arithmétique de raison b et de premier terme a.

La suite u est donc arithmétique de raison -2.

Réponse : a.

2. La suite est arithmétique de raison -2, elle est donc strictement décroissante.

Réponse : b.

3. Intuitivement, la limite de cette suite est $-\infty$. On retranche 2 à chaque fois pour passer d'un terme au suivant.... on imagine bien ce que vont devenir les termes quand n va prendre des grandes valeurs.

Réponse : b.