MATHEMATIQUES

Comportement global d'une suite : entraînement savoir-faire (corrigé)

Exercice 1

Méthode : Sens de variation d'une suite

• Pour étudier le sens de variation d'une suite u, on compare, pour tout entier naturel n, u_{n+1} et u_n en étudiant le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
Plus précisément, si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, la suite u est croissante et si $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, la suite u est décroissante.

• Dans le cas où la suite u est définie par $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,
Si f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, alors la suite u est strictement croissante.
Si f est strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, alors la suite u est strictement décroissante.
Autrement dit, la suite u et la fonction f (sur $[0\ ;\ +\infty[$) ont le même sens de variation.
ATTENTION ! Ce résultat ne s'applique pas aux suites définies par récurrence.

Conseil

Vous pouvez calculer les premiers termes de chacune des suites suivantes afin de conjecturer son sens de variation.... C'est toujours plus simple de savoir où on va.

Autre chose, en calculant ces termes, on peut constater que la suite n'est ni croissante ni décroissante (si on a par exemple $u_0 < u_1$ et $u_1 > u2$) et dans ce cas là les calculs des premiers termes permettent de conclure. Vous avez donc tout à y gagner de faire cela !

a. Pour tout entier naturel n non nul,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(-3 + \frac{2}{n+1}\right) - \left(-3 + \frac{2}{n}\right) \\ &= -\cancel{3} + \frac{2}{n+1} + \cancel{3} - \frac{2}{n} \\ &= \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} \\ &= \frac{2n}{n(n+1)} - \frac{2(n+1)}{n(n+1)} \quad \text{Mise au même dénominateur.} \\ &= \frac{2n - 2(n+1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{2n - 2n - 2}{n(n+1)} \\ &= \frac{-2}{n(n+1)} < 0 \end{aligned}$$

Autre méthode

La fonction f associée à cette suite est la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = -3 + \dfrac{2}{x}$. Cette fonction est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et $f'(x) = -\dfrac{2}{x^2}$. Comme la fonction dérivée est négative sur $]0\ ;\ +\infty[$, on en déduit que f est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$. Ainsi, u est décroissante.

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, donc la suite u est décroissante.

b. L'égalité $u_{n+1} = u_n + 4n + 3$ s'écrit $u_{n+1} - u_n = 4n + 3$.
On en déduit que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Donc la suite u est croissante.

c. Pour tout entier naturel n non nul,

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \frac{2^{n+1}}{n+1}-\frac{2^n}{n}\\
&= \frac{n\times 2^{n+1}}{n(n+1)}-\frac{(n+1)\times 2^n}{n(n+1)}\\
&= \frac{n\times 2^{n+1}-(n+1)\times 2^n}{n(n+1)}\\
&= \frac{2^n(2n-(n+1))}{n(n+1)}\\
&= \frac{2^n(n-1)}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

Passage délicat

La mise en facteur de 2^n est délicate.
Je vous la fait au ralenti :

$$\begin{aligned}
n\times 2^{n+1}-(n+1)\times 2^n &= n\times \underbrace{2\times 2^n}_{=2^{n+1}}-(n+1)\times 2^n\\
&= 2^n(2n-(n+1))
\end{aligned}$$

Comme $n \geqslant 1$, $n-1 \geqslant 0$ et par conséquent $u_{n+1}-u_n \geqslant 0$.
Donc la suite u est décroissante.

Exercice 2

a. On montre que la suite est arithmétique.

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= (-0,3(n+1)+5)-(-0,3n+5)\\
&= -0,3n-0,3+5+0,3n-5\\
&= -0,3 \quad \text{Indépendant de } n.
\end{aligned}$$

Autrement

Toute suite u définie par une relation du type $u_n = a+bn$ est une suite arithmétique de raison b et de premier terme a.

On a donc pour tous les entiers naturels n : $u_{n+1} = u_n - 0,3$.

La suite u est donc arithmétique de raison $-0,3$.

Cette raison est négative, ainsi u est décroissante.

b. La suite u est la suite (q^n) avec $q = 1,05$.
C'est un résultat de cours, cette suite est croissante car $1,05 > 1$.

Remarque

Cette suite est évidemment géométrique de raison $1,05$ car :

$$u_{n+1} = (1,05)^{n+1} = 1,05\times 1,05^n = 1,05u_n$$

c. On reconnaît une suite géométrique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $0,98$.
Le terme général u_n en fonction de n est donné par : $u_n = -2\times(0,98)^n$.

Comme la suite (q^n) est décroissante pour $0 < q < 1$, la suite $((0,98)^n)$ est décroissante.

En multipliant par -2 on change le sens de variation, donc la suite u est croissante.

Exercice 3

1. a. Les points se rapprochent de l'axe des abscisses. Cela signifie que lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes, u_n prend des valeurs de plus en plus proches de 0.
Les termes de la suite semblent tendre vers 0.
On conjecture donc que la limite de la suite est 0 ce qui s'écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b. Les points alternent de part et d'autre de l'axe des abscisses. Cette suite n'a pas de limite.

Suite à reconnaître

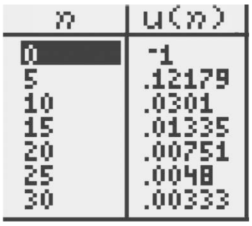
Cette suite est la suite définie par $u_n = (-1)^n$. Les termes valent -1 ou 1 suivant la parité de n.

c. Les points montent de plus en plus lorsque les valeurs de n augmentent. Cela signifie que u_n de vient de plus en plus grand quand n devient grand. On conjecture que la limite de cette suite est $+\infty$.

d. Les points se rapprochent de la droite d'équation $y = 0,7$. On conjecture que la limite de cette suite est 0,7.

e. Les valeurs de v_n semble se rapprocher de 1. On conjecture que la limite de la suite est 1.

2. On utilise la calculatrice pour obtenir des valeurs de u_n lorsque n prend des grandes valeurs :



n	u(n)
0	-1
5	.12179
10	.0301
15	.01335
20	.00751
25	.0048
30	.00333

Les termes de la suite semblent tendre vers 0.
On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.