MATHEMATIQUES
Probabilités - Variables aléatoires : entraînement (1)

Exercice 1

Un objet est produit en série dans un entreprise, au coût de 950 euros. A l'issue de sa fabrication, il peut présenter deux types de défauts, notés A et B. La garantie permet de faire des réparations aux frais de l'entreprise, selon le barême suivant :

- 100 euros pour le défaut A ;
- 150 euros pour le défaut B ;
- 250 euros pour les deux défauts simultanés.

On admet que sur l'ensemble de la production, 90% des objets ne présentent aucun défaut, 4 % présentent le seul défaut A et 2 % présentent le seul défaut B.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque objet choisi au hasard dans la production, associe son prix net, c'est à dire son coût de production augmenté éventuellement du coût de la réparation.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Calculer l'espérance mathématique de X. Que représente $E(X)$ pour l'entreprise ?

3. L'entreprise veut faire un bénéfice moyen de 100 euros par objet. Quel doit être le prix de vente d'un objet pour réaliser cet objectif ?

Exercice 2

Nabolos hésite entre deux jeux :

Premier jeu : Pour une mise de 5 euros, le joueur lance un dé cubique supposé parfaitement équilibré et emporte :

- une somme correspondant au chiffre obtenu si ce chiffre est pair.
- une somme correspondant au triple du chiffre obtenu si ce chiffre est impair.

Deuxième jeu : Pour une mise de 8 euros, le joueur lance deux dés cubiques supposés parfaitement équilibrés et emporte une somme égale au double du plus grand des deux chiffres obtenus (si les chiffres sont identiques, il emporte une somme égale au double de ce chiffre).
On appelle gain du joueur la somme obtenue diminuée de la mise (le gain peut être négatif).
Vous êtes chargés de conseiller Nabolos dans son choix. Pour cela, on appelle X la variable aléatoire associée au gain obtenu avec le premier jeu et Y la variable aléatoire associée au gain obtenu avec le deuxième jeu.

1. a. On s'intéresse dans cette question au premier jeu.
Compléter les tableaux suivants :

Dé	1	2	3	4	5	6
Somme gagnée						
Gain x_i						

x_i						
$P(X = x_i)$						

b. En détaillant les calculs, déterminer l'espérance mathématique et l'écart type de la variable X.

2. a. On s'intéresse dans cette question au deuxième jeu.
Compléter les tableaux suivants :

Tableau donnant la somme gagnée par le joueur :

Dé n°1 / Dé n°2	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Somme gagnée						
Gain y_i						
$P(Y = y_i)$						

b. À l'aide de la calculatrice donner l'espérance mathématique et l'écart type de la variable Y.

3. En comparant les deux espérances mathématiques, que pouvez-vous conclure ?

4. En comparant les deux écart types, que pouvez-vous conclure ?

5. Que conseillez-vous à Nabolos ?

6. Quelle devrait être la mise pour que le premier jeu soit équitable ?

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 3

Un sac contient 1 jeton rouge, 3 jetons blancs et n jetons noirs (n entiers, $n \geqslant 1$).
Un jouer mise m € (m entier, $m \geqslant 1$), puis tire un jeton du sac. S'il tire le jeton rouge, il gagne 10 €, un jeton blanc, il gagne 5 €, et ne gagne rien si le jeton tiré est noir.

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique du joueur, c'est-à-dire la somme gagnée diminuée de sa mise.

1. On considère que la mise du joueur est de $m = 1$ € :

- **a.** Déterminer la loi de probabilité de X sous forme d'un tableau.
- **b.** Calculer l'espérance mathématique de la variable X en fonction de n.
- **c.** Combien de jetons noirs n faut-il mettre dans l'urne pour que le jeu soit équitable ?

2. On décide de placer 16 jetons noirs dans le sac :

- **a.** Déterminer la loi de probabilité X sous forme d'un tableau.
- **b.** Calculer l'espérance mathématique de la variable X en fonction de m.
- **c.** Déterminer la mise du joueur pour que le jeu soit équitable ?