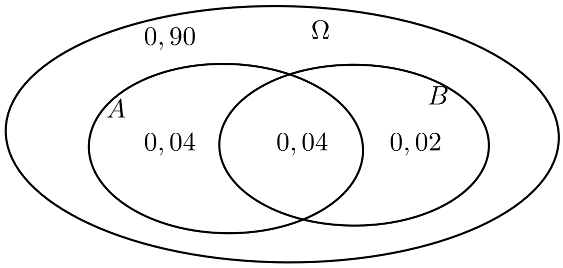
MATHEMATIQUES
Probabilités - Variables aléatoires : entraînement 1 (corrigé)

Exercice 1

1. La variable aléatoire X peut prendre les valeurs : 950, 1050, 1100 et 1200.
Avec les données de l'énoncé, on obtient le diagramme suivant :



Explications
On obtient le pourcentage d'objets présentant les deux deux défauts en calculant $1 - 0,9 - 0,02 - 0,04 = 0,04$.

La loi de probabilité est donné par le tableau suivant :

x_i	950	1050	1100	1200
$P(X = x_i)$	0,9	0,04	0,02	0,04

2. $E(X) = 950 \times 0,9 + 1050 \times 0,04 + 1100 \times 0,02 + 1200 \times 0,04 = 967$.
Le prix net moyen d'un objet est 967 €.

3. Pour faire un bénéfice moyen de 100 € par objet, l'entreprise doit vendre l'objet $967 + 100 = 1067$ €.

Exercice 2

1. Premier jeu :

a. Résultats de l'expérience aléatoire X :

Dé	1	2	3	4	5	6
Somme gagnée	3	2	9	4	15	6
Gain	-2	-3	4	-1	10	1

D'où la loi de probabilité de X :

x_i	-3	-2	-1	1	4	10
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

b. Calculs de l'espérance mathématique et l'écart type de la variable X :

$$E(X) = -3 \times \frac{1}{6} - 2 \times \frac{1}{6} - 1 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 10 \times \frac{1}{6} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

$$V(X) = \frac{1}{6} \times (-3 - 1,5)^2 + \frac{1}{6} \times (-2 - 1,5)^2 + \frac{1}{6} \times (-1 - 1,5)^2 + \frac{1}{6} \times (1 - 1,5)^2 + \frac{1}{6} \times (4 - 1,5)^2 + \frac{1}{6} \times (10 - 1,5)^2 = \frac{235}{12} \simeq 19,6$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{235}{12}} \simeq 4,4.$$

2. **Deuxième jeu :**

a. Résultats de l'expérience aléatoire Y et loi de Y (tableau donnant la somme gagnée) :

Dé n°2 \ Dé n°1	1	2	3	4	5	6
1	2	4	6	8	10	12
2	4	4	6	8	10	12
3	6	6	6	8	10	12
4	8	8	8	8	10	12
5	10	10	10	10	10	12
6	12	12	12	12	12	12

Somme gagnée	2	4	6	8	10	12
Gain y_i	-6	-4	-2	0	2	4
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

b. À l'aide de la calculatrice,l'espérance mathématique de Y est $\mathrm{E(Y)} \simeq 0,94$ et l'écart type de la variable Y est $\sigma(\mathrm{Y}) \simeq 2,8$

3. $\mathrm{E(X)} = 1{,}5$ et $\mathrm{E(Y)} \simeq 0,94$ donc le premier jeu est plus favorable pour Nabolos.

4. $\sigma(\mathrm{X}) \simeq 4,4$ et $\sigma(\mathrm{Y}) \simeq 2,8$ donc le premier jeu est plus risqué.

5. **Conseils pour Nabolos :** S'il ne veut pas prendre beaucoup de risque, il faut choisir le second jeu mais dans ce cas, le gain moyen est moins élevé.

6. Pour que le premier jeu soit équitable, il faut ramener l'espérance à 0 donc augmenter la mise de 1,5 euro. La mise devrait donc être de 6,5 euros.

Exercice 3

1. Soit $m = 1$ € :

a. Chaque jeton étant tiré au hasard, on est donc en situation d'équiprobabilité.
Chaque probabilité se calcule alors comme $\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.
Le sac contient un jeton rouge, trois jetons blancs et n jetons noirs, soit $(n + 4)$ jetons au total.
La variable aléatoire X prend trois valeurs : $0 - 1 = -1$, $5 - 1 = 4$ et $10 - 1 = 9$.

On en déduit la loi de probabilité de X sous la forme d'un tableau :

x_i	-1	4	9
$p_i = p(\mathrm{X} = x_i)$	$\frac{n}{n+4}$	$\frac{3}{n+4}$	$\frac{1}{n+4}$

b.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 \\ &= \frac{n}{n+4} \times (-1) + \frac{3}{n+4} \times 4 + \frac{1}{n+4} \times 9 \\ &= \frac{-n + 12 + 9}{n+4} \\ &= \frac{-n + 21}{n+4}\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}\text{Le jeu est équitable} &\iff \mathrm{E}(X)=0\\ &\iff \frac{-n+21}{n+4}=0\\ &\iff -n+21=0 \text{ car } n\neq -4\\ &\iff n=21\end{aligned}$$

Conclusion : Pour une mise de 1 € , le jeu est équitable quand l'urne contient 21 jetons noirs.

2. Soit $n=16$.

a. On obtient alors la loi de probabilité de X :

x_i	$-m$	$5-m$	$10-m$
$p_i=p(\mathrm{X}=x_i)$	$\dfrac{16}{16+4}=\dfrac{16}{20}$	$\dfrac{3}{20}$	$\dfrac{1}{20}$

b.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3\\ &= \frac{16}{20}\times(-m)+\frac{3}{20}\times(5-m)+\frac{1}{20}\times(10-m)\\ &= \frac{-16m+15-3m+10-m}{20}\\ &= \frac{-20m+25}{20}\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}\text{Le jeu est équitable} &\iff \mathrm{E}(X)=0\\ &\iff \frac{-20m+25}{20}=0\\ &\iff -20m+25=0\\ &\iff 20m=25\\ &\iff m=\frac{25}{20}=\frac{5}{4}=1,25\end{aligned}$$

Conclusion : Avec 16 jetons noirs dans l'urne, le jeu est équitable quand la mise de départ est de $1,25$ €.