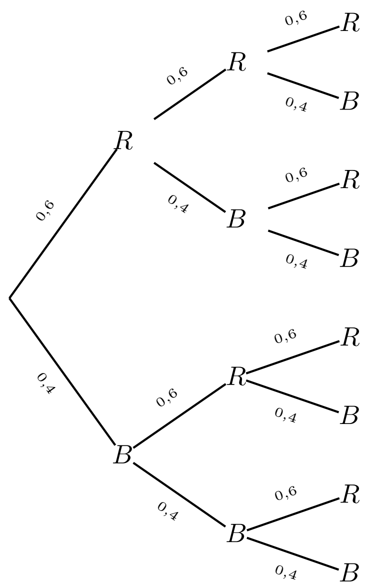
Lycée Louise Michel (Gisors) www.mathGM.fr
Première

MATHEMATIQUES
Probabilités - Variables aléatoires : entraînement 2 (corrigé)

Exercice 1

1.



2. On obtient 9 € lorsque les trois boules tirées sont rouges (tirage RRR).
La probabilité de gagner 9 € est donnée par : $0,6 \times 0,6 \times 0,6 = 0,216$.

Explications
La probabilité de l'issue RRR est donnée par le produit des probabilités rencontrées sur le chemin conduisant à cette issue.

3. **Première méthode :**
On sait que $P(X = x_1) + P(X = x_2) + ... + P(X = x_n) = 1$.
Ainsi, $P(X = -7) = 1 - (0,064 + 0,432 + 0,216) = 0,288$.

Deuxième méthode :
Le gain algébrique est de -7 €, lorsqu'on tire 2 boules bleues et 1 boule rouge.

Trois tirages mènent à ce résultats :
- BBR de probabilité : $0,4 \times 0,4 \times 0,6 = 0,0,096$
- BRB de probabilité : $0,4 \times 0,6 \times 0,4 = 0,096$
- RBB de probabilité : $0,6 \times 0,4 \times 0,4 = 0,096$

Explications
Pour obtenir les probabilités de ces issues, on multiplie les probabilités inscrites sur les branches. Je l'ai déjà dit !

Ainsi, $P(X = -7) = 0,096 \times 3 = 0,288$.

4. $E(X) = -15 \times 0,064 - 7 \times 0,288 + 1 \times 0,432 + 9 \times 0,216 = -0,6$.

En moyenne, on perdra 0,6 € par partie à ce jeu. Le jeu est défavorable au joueur.

5. a. La probabilité de gagner à ce jeu est $0,432 + 0,216 = 0,648$.
Cette probabilité est supérieure à 0,5, donc on a plus de chances de gagner que de perdre.
L'affirmation est donc vraie.

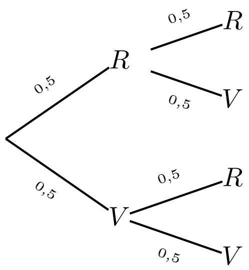
b. Effectivement la probabilité de gagner est supérieure à celle de perdre mais l'espérance est négative. Donc le jeu est défavorable au joueur.
L'affirmation est fausse.

Exercice 2

1. a. $n = 3$. Le dé est donc composé de 3 faces vertes et 3 faces rouges. La partie coûte 6 € et si on obtient deux couleurs identiques, on gagne 9 €, sinon on ne gagne rien.
Le gain algébrique peut donc être de $+3$ € ou de -6 €._ X prend donc les valeurs 3 et -6.

En notant R pour rouge et V vert, les issues sont donc :

$$\underbrace{RR}_{X=3} \quad , \quad \underbrace{RV}_{X=-6} \quad , \quad \underbrace{VR}_{X=-6} \quad , \quad \underbrace{VV}_{X=3}$$



Comme il y a autant de faces rouges que de faces vertes, on obtient l'arbre pondéré ci-contre.

L'événement $(X = 3)$ est réalisé pour les issues RR et VV.

Ainsi, $P(X = 3) = P(RR) + p(VV) = 0,5 \times 0,5 + 0,5 \times 0,5 = 0,5$.

L'événement $(X = -6)$ est réalisé pour les issues RV et VR.

Ainsi, $P(X = -6) = P(RV) + p(VR) = 0,5 \times 0,5 + 0,5 \times 0,5 = 0,5$.

Loi de probabilité de X :

x_i	3	-6
$P(X = x_i)$	0,5	$0,5$

b. $E(X) = 0,5 \times 3 - 6 \times 0,5 = -1,5$.

Espérance

Cela signifie qu'à chaque partie le joueur perd en moyenne 1,5 €. A déconseiller pour le joueur, à moins qu'il aime perdre de l'argent :-)

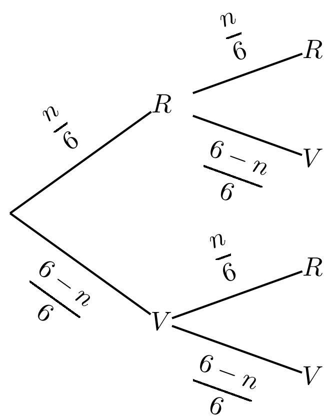
c. L'espérance de gain du joueur étant négative, c'est l'organisateur qui est avantagé par ce jeu.

2. cas général.

a. Il y a toujours 4 issues possibles :

$$\underbrace{RR}_{X=3n-2n=n} \quad , \quad \underbrace{RV}_{X=-2n} \quad , \quad \underbrace{VR}_{X=-2n} \quad , \quad \underbrace{VV}_{X=3n-2n=n}$$

X prend donc les valeurs n et $-2n$.



Comme il y a n faces rouges et donc $6 - n$ faces vertes, la probabilité d'obtenir une face rouge est $\dfrac{n}{6}$ et la probabilité d'obtenir une face verte est $\dfrac{6-n}{6}$.
On obtient l'arbre pondéré ci-contre.

L'événement $(X = n)$ est réalisé pour les issues RR et VV.

Ainsi, $P(X=n)=P(RR)+p(VV)=\dfrac{n}{6}\times\dfrac{n}{6}+\dfrac{6-n}{6}\times\dfrac{6-n}{6}=\dfrac{n^2}{36}+\dfrac{(6-n)^2}{36}=\dfrac{n^2+(6-n)^2}{36}$.

L'événement $(X=-2n)$ est réalisé pour les issues RV et VR.

Ainsi, $P(X=-2n)=P(RV)+p(VR)=\dfrac{n}{6}\times\dfrac{6-n}{6}+\dfrac{6-n}{6}\times\dfrac{n}{6}=\dfrac{n(6-n)}{36}+\dfrac{n(6-n)}{36}=\dfrac{2n(6-n)}{36}$.

Loi de probabilité de X :

x_i	n	$-2n$
$P(X=x_i)$	$\dfrac{n^2+(6-n)^2}{36}$	$\dfrac{2n(6-n)}{36}$

Calcul de l'espérance de X :

$$\begin{aligned}
E(X) &= n\times\frac{n^2+(6-n)^2}{36}-2n\times\frac{2n(6-n)}{36}\\
&= n\times\frac{n^2+36-12n+n^2}{36}-2n\times\frac{12n-2n^2}{36}\\
&= n\times\left(\frac{(n^2+36-12n+n^2)-2(12n-2n^2)}{36}\right)\\
&= n\times\frac{n^2+36-12n+n^2-24n+4n^2}{36}\\
&= n\times\frac{6n^2-36n+36}{36}\\
&= n\times\frac{6(n^2-6n+6)}{36}\\
&= \frac{n(n^2-6n+6)}{6}
\end{aligned}$$

Je sais...

Je sais ce que vous vous dites : c'est un calcul long et très difficile. Il faut aller doucement.... il faudra un jour être capable de mener ce type de calcul (sans se tromper).

b. Le jeu est plus avantageux pour le joueur lorsque : $E(X)>0$.
On est donc amené à faire le tableau de signes ce cette espérance. $E(X)$ est du signe du numérateur : $n(n^2-6n+6)$.

On commence par le trinôme du second degré : n^2-6n+6, dont le discriminant est $\Delta=36-24=12$. deux racines :

$x_1=\dfrac{6+\sqrt{12}}{2\times 1}=3+\sqrt{3}\simeq 4,7$

Et $x_2=\dfrac{6-\sqrt{12}}{2\times 1}=3-\sqrt{3}\simeq 1,3$

On en déduit le tableau de signes de $E(X)$ sur $[0\ ;\ 6]$:

x	0		$x_2\simeq 1{,}3$		$x_1\simeq 4{,}7$		6
n	0	$+$		$+$		$+$	
n^2-6n+6		$+$	0	$-$	0	$+$	
$E(X)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Signe d'un trinôme

Le trinôme est du signe de a sauf entre ses racines. Comme $a=1$, il est positif partout sauf entre x_1 et x_2.

On en déduit que le jeu est avantageux pour le joueur lorsque $n=1$, $n=5$ ou $n=6$. Sinon, le joueur perd de l'argent (ou au mieux quand $n=0$, il n'en gagne pas).

Exercice 3

Il y a 8 issues dans cette expérience aléatoire (lancer de 3 pièces de monnaie).
FFP, FPF et PFF sont les trois issues avec deux faces exactement.
La probabilité d'obtenir deux faces est donc : $\frac{3}{8}$.
La probabilité de ne pas obtenir deux faces est : $\frac{5}{8}$.
Si X est la variable aléatoire donnant le gain du jour, sa loi de probabilité est donnée par :

x_i	5	-2
$p_i = p(\mathrm{X} = x_i)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$

$E(X) = 5 \times \frac{3}{8} - 2 \times \frac{5}{8} = \frac{5}{8} > 0$.

Donc je joue !