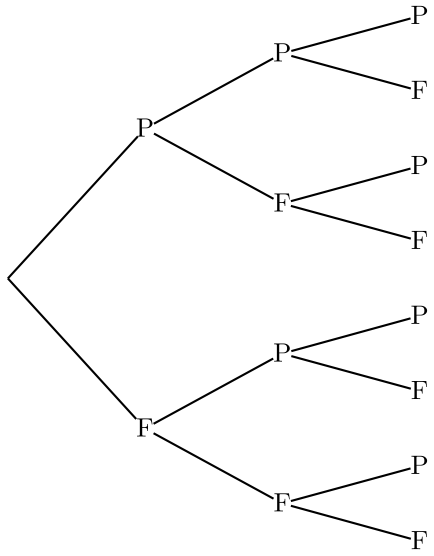
MATHEMATIQUES

Probabilités - Variables aléatoires : QCM (corrigé)

Exercice 1

1. On schématise la situation par un arbre :



Issues	Valeurs prises par X :
PPP	0
PPF	1
PFP	1
PFF	2
FPP	1
FPF	2
FFP	2
FFF	3

Il y a huit issues équiprobables.

Réponse : c.

2. Voir au-dessus.
Réponse : a.

3. L'événement "$X = 3$" est réalisé par 1 issue : FFF.

Il y a équiprobabilité des issues, donc, $P(X = 3) = \dfrac{1}{8}$.

Réponse : a.

LA formule !

Dans une situation d'équiprobabilité, on calcule une probabilité d'un événement A avec la formule : $P(A) = \dfrac{\text{nombre d'issues réalisant A}}{\text{nombre d'issues de } \Omega}$

4. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

- $p(X = 0) = p(PPP) = \dfrac{1}{8}$;
- $p(X = 1) = p(FPP) + p(PFP) + p(PPF) = \dfrac{3}{8}$;
- $p(X = 2) = p(FFP) + p(FPF) + p(PFF) = \dfrac{3}{8}$;
- $p(X = 3) = p(FFF) = \dfrac{1}{8}$.

$$\begin{aligned} E(X) &= p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4 \\ &= \frac{1}{8} \times 0 + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{3}{8} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3 \\ &= \frac{12}{8} \\ &= \frac{3}{2} = 1{,}5 \end{aligned}$$

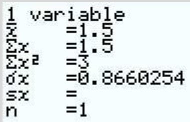
Interprétation

Si on répétait une infinité de fois cette expérience, on obtiendrait **en moyenne** 1,5 *faces.*

Réponse : b.

Calculatrice

On peut déterminer l'espérance et l'écart type d'une variable aléatoire avec une calculatrice :
Après avoir sélectionné le menu statistiques , on entre les données (dans la liste 1 : 0, 1, 2 et 3 et dans la liste 2 : 1/8, 3/8, 3/8 et 1/8). Puis et on paramètre le setup par la touche comme ceci : .
Après avoir validé par , on sélectionne par . On obtient l'écran suivant :



L'espérance est $\overline{x} = 1,5$ et l'écart type environ 0,866.

5. Calcul de $V(X)$.

$$\begin{aligned}
V(X) &= p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + p_3(x_3 - E(X))^2 + p_4(x_4 - E(X))^2 \\
&= \frac{1}{8} \times \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} \times \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} \times \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{8} \times \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{8} \times \frac{9}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{9}{4} \\
&= \frac{9}{32} + \frac{3}{32} + \frac{3}{32} + \frac{9}{32} \\
&= \frac{24}{32} \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Autre façon de calculer la variance :

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
&= p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + p_3x_3^2 + p_4x_4^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{8} \times 0^2 + \frac{3}{8} \times 1^2 + \frac{3}{8} \times 2^2 + \frac{1}{8} \times 3^2 - \frac{9}{4} \\
&= \frac{3}{8} + \frac{12}{8} + \frac{9}{8} - \frac{9}{4} \\
&= \frac{24}{8} - \frac{18}{8} \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Réponse : a.

Exercice 2

1. On sait que $P(X = x_1) + P(X = x_2) + ... + P(X = x_n) = 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6} + a + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} &= 1 \\
\frac{2}{12} + a + \frac{3}{12} + \frac{1}{12} &= 1 \\
\frac{6}{12} + a &= 1 \\
a &= 1 - \frac{1}{2} \\
a &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

La réponse d. est également correcte (évidemment).

Réponse : b. et d.

2. Calcul de l'espérance.

$$\begin{aligned} E(X) &= 1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{6}+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{12} \\ &= \frac{2}{12}+\frac{12}{12}+\frac{9}{12}+\frac{4}{12} \\ &= \frac{27}{12} \\ &= \frac{9}{4} = 2,25 \end{aligned}$$

De plus, $4a+\frac{1}{4} = 4\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = 2,25$.

Réponse : c. et d.

Exercice 3

1. N peut prendre les valeurs 0, 1, 2 et 3. En effet le nombre de faces peintes ne peut excéder 3 et le cube au centre n'a aucune face peinte.

   Réponse : a.

2. Le nombre total de cubes est $3\times 3 = 27$.

   On est dans une situation d'équiprobabilité, donc : $P(N=n) = \dfrac{\text{nombre d'issues réalisant "N=n"}}{\text{nombre d'issues de }\Omega}$

   Il n'y a qu'un seul cube avec aucune face peinte (celui du centre), donc $P(N=0) = \frac{1}{27}$.

   Il y a 8 cubes qui ont trois faces peintes (ceux dans les coins), donc $P(N=3) = \frac{8}{27}$.

   Il y a 6 cubes qui ont une seule face peinte (ceux aux centres des faces), donc $P(N=1) = \frac{6}{27}$.

   Il y a 12 cubes qui ont deux faces peintes (les autres), donc $P(N=2) = \frac{12}{27}$.

   Réponse : c.

3. Calcul de l'espérance.

$$\begin{aligned} E(N) &= 0\times\frac{1}{27}+1\times\frac{6}{27}+2\times\frac{12}{27}+3\times\frac{8}{27} \\ &= \frac{6}{27}+\frac{24}{27}+\frac{24}{27} \\ &= \frac{54}{27} \\ &= 2 \end{aligned}$$

   Réponse : c.