Corrigé de l'exercice 1

... est divisible	par 2	par 3	par 5	par 9
996 426	oui	oui	non	oui
154 118	oui	non	non	non
332 555	non	non	oui	non
1 217 415	non	oui	oui	non
770 590	oui	non	oui	non

Corrigé de l'exercice 2

1) Comme $5+1+9=15$ est un multiple de 3 donc 519 aussi, il admet donc au moins trois diviseurs qui sont 1, 3 et lui-même, **519 n'est donc pas premier**.
2) Comme 206 est pair, il admet donc au moins trois diviseurs qui sont 1, 2 et lui-même, **206 n'est donc pas premier**.
3) En effectuant la division euclidienne de 89 par tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{89}$, c'est-à-dire par les nombres 2, 3, 5 et 7, le reste n'est jamais nul, **89 est donc un nombre premier**.
4) Comme le chiffre des unités de 175 est un 5, alors 175 est divisible par 5, il admet donc au moins trois diviseurs qui sont 1, 5 et lui-même, **175 n'est donc pas premier**.
5) Comme $2+4+9=15$ est un multiple de 3 donc 249 aussi, il admet donc au moins trois diviseurs qui sont 1, 3 et lui-même, **249 n'est donc pas premier**.
6) Comme 656 est pair, il admet donc au moins trois diviseurs qui sont 1, 2 et lui-même, **656 n'est donc pas premier**.

Corrigé de l'exercice 3

1) $168 = 2\times 84$
$168 = 2\times 2\times 42$
$168 = 2\times 2\times 2\times 21$
$168 = 2\times 2\times 2\times 3\times 7$
$168 = \mathbf{2^3\times 3\times 7}$

Donc la décomposition en produit de facteurs premiers de **168** est $\mathbf{2^3\times 3\times 7}$.

2) $80 = 2\times 40$
$80 = 2\times 2\times 20$
$80 = 2\times 2\times 2\times 10$
$80 = 2\times 2\times 2\times 2\times 5$
$80 = \mathbf{2^4\times 5}$

Donc la décomposition en produit de facteurs premiers de **80** est $\mathbf{2^4\times 5}$.

3) $440 = 2\times 220$
$440 = 2\times 2\times 110$
$440 = 2\times 2\times 2\times 55$
$440 = 2\times 2\times 2\times 5\times 11$
$440 = \mathbf{2^3\times 5\times 11}$

Donc la décomposition en produit de facteurs premiers de **440** est $\mathbf{2^3\times 5\times 11}$.

4) $300 = 2\times 150$
$300 = 2\times 2\times 75$
$300 = 2\times 2\times 3\times 25$
$300 = 2\times 2\times 3\times 5\times 5$
$300 = \mathbf{2^2\times 3\times 5^2}$

Donc la décomposition en produit de facteurs premiers de **300** est $\mathbf{2^2\times 3\times 5^2}$.

Corrigé de l'exercice 4

1) Si on divise par 19, c'est que le diviseur est fixé, donc le plus grand c'est lui-même !
2) Dans la division euclidienne de 53 208 par 71, le quotient vaut 749 et le reste 29.
3) Le reste de la division euclienne de 6 180 par 102 ne vaut pas 0 donc 102 n'est pas un diviseur de 6 180.
Le reste de la division euclienne de 6 180 par 103 vaut 0 donc 103 divise 6 180.
Le reste de la division euclienne de 6 180 par 104 ne vaut pas 0 donc 6 180 n'est pas divisible par 104.

4) 76 n'est ni un multiple, ni un diviseur de 921 car $76=921\times 0+76$ et $921=76\times 12+9$.
195 est un diviseur de 975 car $975=195\times 5$.
4 746 est un multiple de 678 car $4\,746=678\times 7$.
736 est un diviseur de 4 416 car $4\,416=736\times 6$.
824 n'est ni un multiple, ni un diviseur de 82 car $82=824\times 0+82$ et $824=82\times 10+4$.
5 706 est un multiple de 951 car $5\,706=951\times 6$.

5) Pour trouver la liste des diviseurs de 564, on cherche tous les produits de deux facteurs qui donnent 564, en écrivant toujours le plus petit facteur en premier.
Il est suffisant de chercher des diviseurs inférieurs au plus grand nombre dont le carré est inférieur à 564, par exemple ici, $23\times23 = 529<564$ et $24\times24 = 576>564$ donc il suffit d'arrêter la recherche de facteurs à 23.
$1\times564 = 564$
$2\times282 = 564$
$3\times188 = 564$
$4\times141 = 564$
$6\times94 = 564$
$12\times47 = 564$
Chacun des facteurs de la liste ci-dessus est un diviseur de 564.
La liste des diviseurs de 564 est donc 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12 ; 47 ; 94 ; 141 ; 188 ; 282 ; 564.

Corrigé de l'exercice 5

1) La liste des diviseurs de 230 est : 1 ; 2 ; 5 ; 10 ; 23 ; 46 ; 115 ; 230
2) La liste des diviseurs de 190 est : 1 ; 2 ; 5 ; 10 ; 19 ; 38 ; 95 ; 190

Corrigé de l'exercice 6

1) 1 567 est un multiple de 5 : Faux, car son chiffre des unités n'est pas 0, ou 5.
2) 1 604 est un multiple de 2 : Vrai, car son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
3) 2 est un diviseur de 1 250 : Vrai, car son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
4) 3 983 est divisible par 5 : Faux, car son chiffre des unités n'est pas 0, ou 5.
5) 2 est un multiple de 1 208 : Faux, il faudrait plutôt dire 1208 est un multiple de 2, car son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.

Corrigé de l'exercice 7

1) **a.** Posons la division euclidienne de 501 par 14.

$$\begin{array}{r|l} 5\,0\,1 & 1\,4 \\ \cline{2-2} 8\,1 & 3\,5 \\ 1\,1 & \end{array} \quad \mathbf{501 = 14 \times 35 + 11}$$

Il y aura **35** pages remplies et une page avec **11** timbres. Donc au total, il faudra **36** pages.
b. Comme l'indique la division euclidienne ci-dessus, il y aura **11** timbres sur la dernière page.

2) **a.** Puisqu'il y a 3 fois moins de places assises dans les petites salles que les grandes salles, alors 1 grande salle correspond à 3 petites salles.
Et ainsi, 3 grandes salles correspondent à 9 petites salles car $3 \times 3 = 9$.
Donc, c'est comme si le cinéma contenait 9 petites salles + 2 petites salles, soit 11 petites salles.
Posons la division euclidienne de 715 par 11.

$$\begin{array}{r|l} 7\,1\,5 & 1\,1 \\ \cline{2-2} 5\,5 & 6\,5 \\ 0 & \end{array} \quad \mathbf{715 = 11 \times 65}$$

Il y a **65** places dans une petite salle.
b. $65 \times 3 = 195$ places
Il y a **195** places dans une grande salle.

Corrigé de l'exercice 8

1) Il va au restaurant à chaque multiple de **231** jours, au cinéma à chaque multiple de **105** jours.
il se fera à nouveau un « restau - ciné » à chaque multiple commun de **231** et de **105**.
Pour trouver le nombre de jours avant le prochain « restau - ciné », on cherche le plus petit multiple qu'ils ont en commun.
Un moyen d'y arriver est de décomposer les nombres de jours en produits de facteurs premiers et d'identifier les différences entre les décompositions :
$\mathbf{231} = \mathbf{7} \times \mathbf{3} \times \mathbf{11}$
$\mathbf{105} = \mathbf{7} \times \mathbf{3} \times \mathbf{5}$
On multiplie les facteurs communs aux deux décompositions avec les facteurs spécifiques à chaque décomposition :
$\mathbf{7} \times \mathbf{3} \times \mathbf{11} \times \mathbf{5} = 1\,155$
Ce phénomène se produira à nouveau au bout de 1 155 jours, lorsqu'il **ira au restaurant** pour la **5**ème fois et qu'il **ira au cinéma** pour la **11**ème fois.

1 155 est bien un multiple de **231** car : $\mathbf{7} \times \mathbf{3} \times \mathbf{11} \times \mathbf{5} = (\mathbf{7} \times \mathbf{3} \times \mathbf{11}) \times \mathbf{5} = \mathbf{231} \times \mathbf{5}$.
1 155 est bien un multiple de **105** car : $\mathbf{7} \times \mathbf{3} \times \mathbf{11} \times \mathbf{5} = \mathbf{7} \times \mathbf{3} \times \mathbf{5} \times \mathbf{11} = (\mathbf{7} \times \mathbf{3} \times \mathbf{5}) \times \mathbf{11} = \mathbf{105} \times \mathbf{11}$.

Corrigé de l'exercice 9

1) Les diviseurs de 108 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 108.
- Les diviseurs de 252 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 18, 21, 28, 36, 42, 63, 84, 126, 252.
36 est le plus grand nombre qui divise à la fois 108 et 252.
Le nombre maximal de bouquets est donc : **36**.
2) $108 \div 36 = 3$
Le nombre d'iris dans chaque bouquet est :**3**.
3) $252 \div 36 = 7$
Le nombre de roses dans chaque bouquet est :**7**.

Corrigé de l'exercice 10

1) Un multiple de 23 s'écrit sous la forme $23k$, où k est un entier. Nous cherchons les valeurs de k telles que :
$$500 < 23k < 650.$$
Divisons chaque membre de l'inégalité par 23 pour isoler k :
$$\frac{500}{23} < k < \frac{650}{23}.$$
Calculons les valeurs approchées :
$$21,7391 < k < 28,2609.$$
Les valeurs entières de k comprises dans cet intervalle sont :
$$k = 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28.$$
Il y a 7 multiples de 23 compris entre 500 et 650.
Pour chaque valeur de k, calculons le multiple correspondant :
$$\begin{aligned} 23 \times 22 &= 506, \\ 23 \times 23 &= 529, \\ 23 \times 24 &= 552, \\ 23 \times 25 &= 575, \\ 23 \times 26 &= 598, \\ 23 \times 27 &= 621, \\ 23 \times 28 &= 644. \end{aligned}$$
2) Un multiple de 19 s'écrit sous la forme $19k$, où k est un entier. Nous cherchons les valeurs de k telles que :
$$256 < 19k < 3000.$$
Divisons chaque membre de l'inégalité par 19 pour isoler k :
$$\frac{256}{19} < k < \frac{3000}{19}.$$
Calculons les valeurs approchées :
$$13,4737 < k < 157,8947.$$
Les valeurs entières de k comprises dans cet intervalle sont :
$$k = 14, 15, 16, \ldots, 157.$$
Pour trouver le nombre total de valeurs entières de k dans cet intervalle, nous faisons la différence entre les bornes supérieures et inférieures, et ajoutons 1 :
$$157 - 14 + 1 = 144.$$
Il y a 144 multiples de 19 compris entre 256 et 3 000.

Corrigé de l'exercice 11

Soient a et b deux multiples de 7. Par définition, il existe des entiers k et m tels que :
$$a = 7k \quad \text{et} \quad b = 7m.$$
$$a + b = 7k + 7m.$$
En factorisant par 7, on obtient :
$$a + b = 7(k + m).$$
$7(k + m)$ est un multiple de 7. Ainsi la somme de deux multiples de 7 est un multiple de 7.

Corrigé de l'exercice 12

• Soit n un entier pair.
Par définition, il existe un entier k tel que :

$$n = 2k.$$

Calculons le carré de n :

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2.$$

Nous pouvons factoriser $4k^2$ par 2 :

$$4k^2 = 2(2k^2).$$

Puisque $2k^2$ est un entier (puisque k est un entier), nous avons montré que n^2 est un multiple de 2, c'est-à-dire que n^2 est pair.

• Soit m un entier impair. Par définition, il existe un entier l tel que :

$$m = 2l + 1.$$

Calculons le carré de m :

$$m^2 = (2l + 1)^2 = 4l^2 + 4l + 1.$$

Nous pouvons réécrire $4l^2 + 4l + 1$ comme :

$$4l^2 + 4l + 1 = 2(2l^2 + 2l) + 1.$$

Puisque $2l^2+2l$ est un entier (puisque l est un entier), nous avons montré que m^2 est de la forme $2\times\text{entier}+1$, c'est-à-dire que m^2 est impair.

Ainsi,

1) Le carré d'un entier pair est pair.
2) Le carré d'un entier impair est impair.

Corrigé de l'exercice 13

Soient a et b deux entiers impairs. Par définition, il existe des entiers k et m tels que :

$$a = 2k + 1 \quad \text{et} \quad b = 2m + 1.$$

Calculons la somme $a + b$:

$$a + b = (2k + 1) + (2m + 1).$$

Simplifions cette expression :

$$a + b = 2k + 2m + 1 + 1 = 2k + 2m + 2.$$

Nous pouvons factoriser par 2 :

$$a + b = 2(k + m + 1).$$

Notons que $k + m + 1$ est un entier puisque k et m sont des entiers. Par conséquent, $2(k + m + 1)$ est un multiple de 2, c'est-à-dire que $a + b$ est pair.

Corrigé de l'exercice 14

Soit a et b deux entiers impairs.
Par définition, nous pouvons écrire :

$$a = 2k + 1 \quad \text{et} \quad b = 2m + 1,$$

où k et m sont des entiers.

Nous voulons montrer que le produit $a \times b$ est impair.

$$a \times b = (2k + 1)(2m + 1).$$

$$a \times b = 2k \times 2m + 2k \times 1 + 1 \times 2m + 1 \times 1.$$
$$= 4km + 2k + 2m + 1.$$

$$= 2(2km + k + m) + 1.$$

Notons que $2km + k + m$ est un entier (puisque k et m sont des entiers). Ainsi, nous avons montré que :

$$a \times b = 2(\text{entier}) + 1,$$

ce qui signifie que $a \times b$ est impair.

Le produit de deux entiers impairs est impair.

Corrigé de l'exercice 15

Puisque le nombre doit être pair et divisible par 5, il doit se terminer par 0.
De plus, pour être divisible par 3, il doit être un multiple de 30.

Les multiples de 30 compris entre 100 et 400 sont :
120 ; 150 ; 180 ; 210 ; 240 ; 270 ; 300 ; 330 ; 360 ; 390.

Dans cette liste seul 330 est divisible par 11.

Corrigé de l'exercice 16

Le bus de la ligne 1 met $8 \times 3 = 24$ minutes pour repasser à l'arrêt « Mairie ».

Le bus de la ligne 2 met $8 \times 4 = 32$ minutes pour repasser à l'arrêt « Mairie ».

De 6 h 30 à 20 h s'écoulent 13 h 30, soit 810 minutes.

Les deux bus vont se retrouver à un moment de la journée à l'arrêt « Mairie » en même temps s'il existe un multiple commun à 24 et 32 inférieur ou égal 810.

Or $8 \times 3 \times 4 = 8 \times 4 \times 3 = 96$ est le plus petit multiple commun à 24 et 32.

Or 96 min = 1 h 36 min.

Les deux bus vont donc se retrouver toutes les 1 h 36 min à l'arrêt « Mairie » en même temps soit à :

6 h 30 ; 8 h 06 ; 9 h 42 ; 11 h 18 ; 12 h 54 ; 14 h 30 ; 16 h 06 ; 17 h 42 ; 19 h 18. Les deux bus vont se retrouver toutes les 1 h 36 min à l'arrêt « Mairie » en même temps soit à : 6 h 30 ; 8 h 06 ; 9 h 42 ; 11 h 18 ; 12 h 54 ; 14 h 30 ; 16 h 06 ; 17 h 42 ; 19 h 18

Corrigé de l'exercice 17

Céline doit donner 6 crêpes à chacun de ses cousins. En effet, $31 = 5 \times 6 + 1$ et du coup, il lui reste une crêpe.
En revanche, si elle partage les crêpes en 8 (en comptant les trois cousins supplémentaires), il lui reste 7 crêpes.
En effet, $31 = 8 \times 3 + 7$. Ainsi, les 8 cousins auront 3 crêpes chacun et il restera 7 crêpes.

Voilà pourquoi Céline est partie chercher ses trois autres cousins !

Corrigé de l'exercice 18

En appelant n le nombre entier naturel choisi, on obtient successivement :

- $n + 4$;
- $3(n + 4)$;
- $3(n + 4) + 2x$;
- $3(n + 4) + 2n + 3$;

Le résultat en fonction de n est donc $3(n + 4) + 2n + 3$.

On a $3(n + 4) + 2n + 3 = 3n + 12 + 2n + 3 = 5n + 15 = 5 \times (n + 3)$.
Cette dernière écriture montre que le nombre final obtenu est bien un multiple de 5 et ce quel que soit le nombre n entier naturel choisi au départ.

Corrigé de l'exercice 19

Soit x le nombre entier choisi. Suivons les étapes du programme de calcul en fonction de x :

1) Choisir un nombre entier x.
2) Ajouter 3 :
$$x + 3$$
3) Multiplier le résultat par 7 :
$$7(x + 3) = 7x + 21$$
4) Ajouter le triple du nombre de départ :
$$7x + 21 + 3x = 10x + 21$$
5) Soustraire 21 au résultat :
$$10x + 21 - 21 = 10x$$

Ainsi, le résultat final est :
$$10x$$

Stéphane trouve 55, donc nous avons :
$$10x = 55$$

Pour trouver x, nous résolvons l'équation :
$$x = \frac{55}{10} = 5,5$$

Le nombre trouvé $x = 5,5$ n'est pas un nombre entier, ce qui contredit la première étape du programme de calcul, qui stipule de choisir un nombre entier. Par conséquent, Stéphane a dû faire une erreur dans ses calculs car le résultat de 55 n'est pas possible avec un nombre entier de départ.