Parcours d'exercices

Réduire, développer et factoriser

1

CALCUL LITTERAL

Parcours 1

1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – 11 – 12 – 13 – 14 – 15 – 16 – 17 – 18 – 19 – 20 – 21 – 22 – 23 – 24 – 25 – 26 – 27 – 28 – 29 – 30 – 31 – 32 – 33 – 34 – 35

Parcours 2

1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – 11 – 12 – 13 – 14 – 15 – 16 – 17 – 18 – 19 – 20 – 21 – 22 – 23 – 24 – 25 – 26 – 27 – 28 – 29 – 30 – 31 – 32 – 33 – 34 – 35

Parcours 3

1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – 11 – 12 – 13 – 14 – 15 – 16 – 17 – 18 – 19 – 20 – 21 – 22 – 23 – 24 – 25 – 26 – 27 – 28 – 29 – 30 – 31 – 32 – 33 – 34 – 35

1 Pour s'échauffer

Jour 1 : .../10

Jour 2 : .../10

Jour 3 : .../10

2 Pour s'entraîner

Exercice 1

Réduire les expressions suivantes.

$A = 2x + 9x$

$B = 7x + 6x + 2$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 2

Réduire et simplifier les expressions suivantes, si c'est possible.

$A = 5b + 4b$ $\quad$ $C = 7a \times 9a$

$B = 6a + 5$ $\quad$ $D = 8y \times 4$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 3

Réduire, si possible, les expressions.

$A = 11x \times (-5)$

$B = -11x + 5$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 4

Supprimer les parenthèses et réduire.

$A = -(3z + 6) + (z^2 + 7z - 5)$

$B = (-3b^2 - b - 9) - (5b^2 - 8b + 1)$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 5

Réduire les expressions suivantes.

1) $A = x + \frac{1}{2}x$

2) $B = -\frac{1}{3}x + x$

3) $C = -5x^2 + 3,7x - 15,3x^2 - 18,3x + 2,9x^2$

4) $D = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 6 - \frac{1}{2} - \frac{5}{6}x^2 + 2$

Exercice 6

Développer et réduire les expressions suivantes.

$A = (x - 3)(x + 3)$

$B = (x + 6)^2$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 7

Développer et réduire les expressions suivantes.

$A = (4x-3)(4x+3)$

$B = (9x+6)^2$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 8

Développer et réduire les expressions suivantes.

$A = \left(\frac{4}{7}x-3\right)\left(\frac{4}{7}x+3\right)$

$B = \left(\frac{4}{9}x+6\right)^2$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 9

Développer et réduire les expressions suivantes.

$A = -3-(7x+8)(9x+10)$

$B = 8x+6(10x-1)$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 10

Développer et réduire les expressions suivantes.

$A = (6x+7)(9x+8)$

$B = (8x-8)(7x+7)$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 11

Développer puis réduire les expressions littérales suivantes.

$A = (-3x-2)(3x-5)-(-4x-1)(-3x+1)$

$B = (t+5)(-2t+2)-(-t-2)^2$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 12

Factoriser les expressions suivantes.

$A = 2a+8b$

$B = 28x+49x^2$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 13

Factoriser les expressions suivantes.

$A = (2x+2)(3x-2)-(2x+2)(4x-4)$

$B = x(x-3)-4(x-3)$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 14

Factoriser les expressions suivantes.

$A = x^2+2x+1$

$B = x^2-18x+81$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 15

Factoriser les expressions suivantes.

1) $A = x^2-81$

2) $B = x^2-4$

3) $C = x^2-25$

4) $D = x^2-49$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 16

Factoriser les expressions suivantes.

1) $A = 16x^2-81$

2) $B = 81x^2-4$

3) $C = 9x^2-25$

4) $D = 81x^2-49$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 17

Factoriser les expressions suivantes.

$A = 16x^2-8x+1$

$B = \frac{4}{49}x^2-64$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 18

Factoriser les expressions suivantes.

$A = (2x-6)^2-16$

$B = 64-(8x-7)^2$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 19

Factoriser les expressions suivantes.

$A = (2x-6)^2-(4x+8)^2$

$B = 16(8x-7)^2-4(8x-8)^2$

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 20

Préciser les valeurs interdites éventuelles, puis écrire l'expression sous la forme d'un quotient :

$A = \frac{9}{6x-3}-\frac{9}{2x+8}$.

$B = \frac{4}{x}-\frac{3}{3x+2}$.

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

Exercice 21

1) Soient K, J et I trois nombres vérifiant l'égalité suivante : $K = J + I$.
Exprimer J en fonction de K et I.

2) Soient e, d et c trois nombres vérifiant l'égalité suivante : $e = d - c$.
Exprimer d en fonction de e et c.

☐ J'ai compris, je sais faire.

MathALÉA

3 Pour chercher

Exercice 22

ABC est un triangle rectangle en A tel que $BC = x+7$ et $AC = 5$ où x désigne un nombre positif.
Exprimer AB^2 en fonction de x sous forme factorisée.

MathGM

Exercice 23

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (2x-3)^2 - 6$$

Montrer que pour tout réel x,

$$g(x) = (x-3)(4x+1) - (x-6).$$

Exercice 24

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (1-2x)^2 - 9$$

1) Montrer que $f(x) = 4x^2 - 4x - 8$.

2) Montrer que $f(x) = (4-2x)(-2-2x)$.

MathGM

Exercice 25

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 30$$

1) Montrer que $f(x) = (2x+6)(x-5)$.

2) Montrer que $f(x) = (2x+2)(x-3) - 24$.

MathGM

Exercice 26

1) On considère $A = (x+3)(2x+1) - x(2x+7)$.
Un élève affirme que quel que soit le nombre x, la valeur de A est toujours égale à 3. Comment peut-on vérifier que cet élève à raison ?

2) Soit $C = (2x+6)(x-4)$ et $D = x(2x-2) - 24$.
A t-on $C = D$ pour tous les réels x ?

MathGM

Exercice 27

1) Développer et réduire $D = (a+5)^2 - (a-5)^2$.

2) On pose $D = 10\,005^2 - 9\,995^2$.
Sans utiliser la calculatrice, en se servant de la question **1.**, trouver la valeur de D (indiquer les étapes du calcul).

MathGM

Exercice 28

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3(x-3)^2 + 5$$

1) Montrer que $f(x) = 3x^2 - 18x + 32$.

2) Choisir la forme la plus adaptée pour calculer chaque image puis calculer.
a) $f(3)$ b) $f\left(\sqrt{2}\right)$ c) $f(0)$

Exercice 29

Les questions suivantes sont indépendantes.

1) Calculer, en fonction de x, l'aire d'un carré de côté $2x+1$.

2) ABC est un triangle rectangle en A. On a $AB = x+1$, $AC = x+2$. Calculer BC^2 en fonction de x.

3) Un triangle ABC est tel que : $AB = x+5$, $AC = 2x+2$ et $BC^2 = 5x^2+16x+31$. Ce triangle peut-il être rectangle en A ? Justifier.

4) Le côté d'un carré mesure x cm. Un élève affirme que lorsqu'on augmente le côté de ce carré de 2 cm, son aire augmente de $4 \times x$ cm^2. A-t-il raison ?

5) Quand on augmente le côté d'un carré de 1 mètre, l'aire du carré augmente de 5 m^2. Quelle est la longueur du côté du carré au départ ?

MathGM

Exercice 30

Soit $A = \frac{1}{4}\left[(a+b)^2 - (a-b)^2\right]$.

1) Calculer A pour $a = 1$ et $b = 5$.

2) Calculer A pour $a = -2$ et $b = -3$.

3) Alex affirme que le nombre A est égal au produit des nombres a et b. A-t-il raison ? Justifier.

DNB

Exercice 31

Trois nombres positifs x, y et z vérifient l'égalité $x^2 + y^2 = z^2$.
De plus, le carré de la somme des nombres x et y est égal à 41 et le carré de leur différence est égal à 9.
Quelle est la valeur de z ?

MathGM

Exercice 32

1) Soit n un nombre entier positif. Justifiez l'égalité $\frac{3}{4n} + \frac{1}{3n} + \frac{5}{12n} = \frac{3}{2n}$.

2) En déduire l'écriture de $\frac{3}{14}$ sous la forme d'une somme de trois fractions.

Exercice 33

La distance d de freinage d'un véhicule dépend de sa vitesse et de l'état de la route.
On peut la calculer à l'aide de la formule suivante :

$$d = k \times V^2$$

avec d : distance de freinage en m V : vitesse du

DNB

véhicule en m/s

k : coefficient dépendant de l'état de la route

$$\begin{cases} k &= 0,14 \text{ sur route mouillée} \\ k &= 0,08 \text{ sur route sèche.} \end{cases}$$

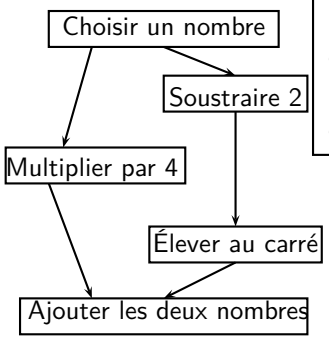
1) Exprimer V en fonction de d et de k.

2) Quelle est la vitesse d'un véhicule (en km/h) dont la distance de freinage sur route mouillée est égale à 15 m ? Arrondir à l'unité.

Exercice 34

Voici deux programmes de calcul :

PROGRAMME A



PROGRAMME B

- Choisir un nombre
- Calculer son carré
- Ajouter 6 au résultat.

1) a) Montrer que, si l'on choisit le nombre 5, le résultat du programme A est 29.

   b) Quel est le résultat du programme B si on choisit le nombre 5 ?

2) Si on nomme x le nombre choisi, expliquer pourquoi le résultat du programme A peut s'écrire $x^2 + 4$.

3) Quel est le résultat du programme B si l'on nomme x le nombre choisi ?

4) Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier les réponses et écrire les étapes des éventuels calculs :

   a) « Si l'on choisit le nombre $\frac{2}{3}$, le résultat du programme B est $\frac{58}{9}$. »

   b) « Si l'on choisit un nombre entier, le résultat du programme B est un nombre entier impair. »

   c) « Le résultat du programme B est toujours un nombre positif. »

   d) « Pour un même nombre entier choisi, les résultats des programmes A et B sont ou bien tous les deux des entiers pairs, ou bien tous les deux des entiers impairs. »

DNB

Exercice 35

Programme de calcul :
- Choisir un nombre entier.
- Élever au carré l'entier qui est juste après et l'entier qui est juste avant.
- Calculer la différence de ces deux carrés.
- Retrancher 3 fois le nombre de départ à cette différence.
- Écrire le résultat.

1) Lorsque le nombre de départ choisi est 3, quel est le résultat final ?

2) Quel nombre obtient-on quand on choisit pour départ le nombre 10 ?

3) Quelle conjecture peut-on faire ? Prouver cette conjecture.

MathGM

4 Pour s'évaluer

Temps : 30 minutes

Essai 1 : .../10

Essai 2 : .../10

5 Les documents en pdf

Le parcours

Les indices

Les réponses

Les corrigés

(Correction)

Corrigé de l'exercice 1

1) $A = 2x + 9x = 11x$

2) $B = 7x + 6x + 2 = 13x + 2$

Corrigé de l'exercice 2

1) $A = 5b + 4b = 9b$

2) $B = 6a + 5 = 6a + 5$

3) $C = 7a \times 9a = 63a^2$

4) $D = 8y \times 4 = 32y$

Corrigé de l'exercice 3

1) $A = 11x \times (-5) = -55x$

2) $B = -11 + 5x$

Corrigé de l'exercice 4

$$\begin{aligned} A &= -(3z+6) + (z^2 + 7z - 5) \\ &= -3z - 6 + z^2 + 7z - 5 \\ &= z^2 + 4z - 11 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} B &= (-3b^2 - b - 9) - (5b^2 - 8b + 1) \\ &= -3b^2 - b - 9 - 5b^2 + 8b - 1 \\ &= -8b^2 + 7b - 10 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 5

1) $= \frac{3}{2}x$

2) $= \frac{2}{3}x$

3) $= -17,4x^2 - 14,6x$

4) $= -\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{15}{2}$

Corrigé de l'exercice 6

1) On développe l'expression en utilisant l'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, avec $a = x$ et $b = 4$:
$A = (x-4)(x+4) = x^2 - 4^2 = x^2 - 16$

2) On développe l'expression en utilisant l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, avec $a = x$ et $b = 9$:
$$\begin{aligned} B = (x+9)^2 &= x^2 + 2 \times x \times 9 + 9^2 \\ &= x^2 + 18x + 81 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 7

1) On développe l'expression en utilisant l'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, avec $a = 4x$ et $b = 3$:
$(4x-3)(4x+3) = (4x)^2 - 3^2 = 16x^2 - 9$

2) On développe l'expression en utilisant l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, avec $a = 9x$ et $b = 6$:
$(9x+6)^2 = (9x)^2 + 2 \times 9x \times 6 + 6^2 = 81x^2 + 108x + 36$

Corrigé de l'exercice 8

1) $A = \left(\frac{4}{7}x - 4\right)\left(\frac{4}{7}x + 4\right) = \left(\frac{4}{7}x\right)^2 - 4^2 = \frac{16}{49}x^2 - 16$

2) $B = \left(\frac{4}{9}x + 9\right)^2 = \left(\frac{4}{9}x\right)^2 + 2 \times \frac{4}{9}x \times 9 + 9^2 = \frac{16}{81}x^2 + \frac{72}{9}x + 81$

Corrigé de l'exercice 9

1) $A = -3 - (7x+8)(9x+10)$
$= -3 - (63x^2 + 70x + 72x + 80)$
$= -3 - 63x^2 - 70x - 72x - 80$
$= -63x^2 - 142x - 83$

2) $B = 8x + 6(10x-1)$
$= 8x + 60x - 6$
$= 68x - 6$

Corrigé de l'exercice 10

1) $A = (6x+7)(9x+8)$
$A = 54x^2 + 48x + 63x + 56$
$A = 54x^2 + 111x + 56$

2) $B = (8x-8)(7x+7)$
$B = 56x^2 + 56x - 56x - 56$
$B = 56x^2 - 56$

Corrigé de l'exercice 11

$A = (-3x-2)(3x-5) - (-4x-1)(-3x+1)$
$= ((-3x)\times 3x + (-3x)\times(-5) + (-2)\times 3x + (-2)\times(-5)) - ((-4x)\times(-3x) + (-4x)\times 1 + (-1)\times(-3x) + (-1)\times 1)$
$= -9x^2 + 15x - 6x + 10 - (12x^2 - 4x + 3x - 1)$
$= (-9x^2 - (12x^2 - 4x + 3x - 1)) + (15x - 6x) + (10)$
$= -21x^2 + 10x + 11$

$B = (t+5)(-2t+2) - (-t-2)^2$
$= (t\times(-2t) + t\times 2 + 5\times(-2t) + 5\times 2) - \left((-t)^2 + 2\times(-t)\times(-2) + (-2)^2\right)$
$= -2t^2 + 2t - 10t + 10 - (4t + t^2 + 4)$
$= (-2t^2 - (4t + t^2 + 4)) + (2t - 10t) + (10)$
$= -3t^2 - 12t + 6$

Corrigé de l'exercice 12

1) $A = 2a + 8b$
$= 2a + 2\times 4b$
$= 2(a+4b)$

2) $B = 28x + 49x^2$
$= 7x\times 4 + 7x\times 7x$
$= 7x(4+7x)$

Corrigé de l'exercice 13

$A = (2x+2)(3x-2) - (2x+2)(4x-4)$.
On remarque que $(2x+2)$ est un facteur commun.
$= (2x+2) + (3x-2) - (2x+2)(4x-4)$
$= (2x+2)(-x+2))$

$B = x(x-3) - 4(x-3)$ On remarque que $(x-3)$ est un facteur commun.
$= x(x-3) - 4(x-3)$
$= (x-3)(x-4)$

Corrigé de l'exercice 14

1) $A = x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2 \times 1 \times x + 1^2 = (x+1)^2$

2) $B = x^2 - 18x + 81 = x^2 - 2 \times 9 \times x + 9^2 = (x-9)^2$

Corrigé de l'exercice 15

1) $A = x^2 - 81$
$A = x^2 - 9^2$
$A = (x-9)(x+9)$

2) $B = x^2 - 4$
$B = x^2 - 2^2$
$B = (x-2)(x+2)$

3) $C = x^2 - 25$
$C = x^2 - 5^2$
$C = (x-5)(x+5)$

4) $D = x^2 - 49$
$D = x^2 - 7^2$
$D = (x-7)(x+7)$

Corrigé de l'exercice 16

1) $A = 16x^2 - 81$
$A = (4x)^2 - 9^2$
$A = (4x-9)(4x+9)$

2) $B = 81x^2 - 4$
$B = (9x)^2 - 2^2$
$B = (9x-2)(9x+2)$

3) $C = 9x^2 - 25$
$C = (3x)^2 - 5^2$
$C = (3x-5)(3x+5)$

4) $D = 81x^2 - 49$
$D = (9x)^2 - 7^2$
$D = (9x-7)(9x+7)$

Corrigé de l'exercice 17

1) $A = 16x^2 - 8x + 1 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 1 + 1^2 = (4x-1)^2$

2) $B = \frac{4}{49}x^2 - 64 = \left(\frac{2}{7}x\right)^2 - 8^2 = \left(\frac{2}{7}x - 8\right)\left(\frac{2}{7}x + 8\right)$

Corrigé de l'exercice 18

1) On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, avec $a = 2x - 6$ et $b = 4$.

$$\begin{aligned}(2x-6)^2 - 16 &= (2x-6)^2 - 4^2 \\ &= [(2x-6) - 4]\,[(2x-6) + 4] \\ &= (2x-10)(2x-2)\end{aligned}$$

2) On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, avec $a = 8$ et $b = 8x - 7$.

$$\begin{aligned}
64 - (8x-7)^2 &= 8^2 - (8x-7)^2 \\
&= [8 - (8x-7)]\,[8 + (8x-7)] \\
&= (8 - 8x + 7)(8 + 8x - 7) \\
&= (-8x + 15)(8x + 1)
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 19

1) On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, avec $a = 2x - 6$ et $b = 4x + 8$.

$$\begin{aligned}
(2x-6)^2 - (4x+8)^2 &= [(2x-6) - (4x+8)]\,[(2x-6) + (4x+8)] \\
&= (2x - 6 - 4x - 8)(2x - 6 + 4x + 8) \\
&= (-2x - 14)(6x + 2)
\end{aligned}$$

2) On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, avec $a = 4(8x-7)$ et $b = 2(8x-8)$.

$$16(8x-7)^2 - 4(8x-8)^2 = [(4 \times 8x - 7 \times 4) - (2 \times 8x - 8 \times 2)]\,[(4 \times 8x - 7 \times 4) + (2 \times 8x - 8 \times 2)] \quad = (32x - 28 - 16x + 16)($$

Corrigé de l'exercice 20

1) L'équation $6x - 3 = 0$ a pour solution $\frac{1}{2}$.
L'équation $2x + 8 = 0$ a pour solution -4.
$\frac{1}{2}$ et -4 sont donc des valeurs interdites pour l'expression.
Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-4\,;\,\frac{1}{2}\right\}$,

$$\begin{aligned}
\frac{9}{6x-3} - \frac{9}{2x+8} &= \frac{9(2x+8)}{(6x-3)(2x+8)} - \frac{9(6x-3)}{(6x-3)(2x+8)} \\
&= \frac{9(2x+8) - 9(6x-3)}{(6x-3)(2x+8)} \\
&= \frac{-36x + 99}{(6x-3)(2x+8)}
\end{aligned}$$

2) Déterminer les valeurs interdites de cette expression, revient à déterminer les valeurs qui annulent le dénominateur de $\frac{3}{3x+2}$, puisque la division par 0 n'existe pas.
L'équation $3x + 2 = 0$ a pour solution $\frac{-2}{3}$.
0 et $\frac{-2}{3}$ sont donc des valeurs interdites pour l'expression.
Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-2}{3}\,;\,0\right\}$,

$$\begin{aligned}
\frac{4}{x} - \frac{3}{3x+2} &= \frac{4(3x+2)}{x(3x+2)} - \frac{3x}{x(3x+2)} \\
&= \frac{12x + 8 - 3x}{x(3x+2)} \\
&= \frac{9x + 8}{x(3x+2)}
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 21

1) On isole J dans un membre de l'égalité :

$K = J + I$

$K - I = J - I - I$

$K - I = J$

Une expression de J en fonction de K et I est $J = K - I$.

2) On isole d dans un membre de l'égalité :

$e = d - c$

$e + c = d - c + c$

$e + c = d$

Une expression de d en fonction de e et c est $d = e + c$.

Corrigé de l'exercice 22
Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $BC = x + 7$ et $AC = 5$, où x désigne un nombre positif. Nous devons exprimer AB^2 en fonction de x sous forme factorisée.
Dans un triangle rectangle, le théorème de Pythagore s'énonce comme suit :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Nous connaissons les longueurs BC et AC, alors nous les substituons dans l'équation :

$$(x + 7)^2 = AB^2 + 5^2$$

Développons $(x + 7)^2$:

$$(x + 7)^2 = x^2 + 14x + 49$$

Et 5^2 :

$$5^2 = 25$$

Substituons ces valeurs dans l'équation :

$$x^2 + 14x + 49 = AB^2 + 25$$

Isolons AB^2 :

$$AB^2 = x^2 + 14x + 49 - 25$$

Simplifions :

$$AB^2 = x^2 + 14x + 24$$

Pour exprimer AB^2 sous forme factorisée, nous devons factoriser $x^2 + 14x + 24$. Nous cherchons deux nombres dont le produit est 24 et la somme est 14. Ces nombres sont 12 et 2. Donc :

$$x^2 + 14x + 24 = (x + 12)(x + 2)$$

Ainsi, la forme factorisée de AB^2 en fonction de x est :

$$AB^2 = (x + 12)(x + 2)$$

Corrigé de l'exercice 23
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (2x - 3)^2 - 6$$

Montrons que pour tout réel x,

$$g(x) = (x - 3)(4x + 1) - (x - 6)$$

Commençons par développer $g(x)$:

$$g(x) = (2x - 3)^2 - 6$$

Développons $(2x - 3)^2$:

$$(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

Donc,

$$g(x) = 4x^2 - 12x + 9 - 6 = 4x^2 - 12x + 3$$

Ensuite, développons $(x-3)(4x+1) - (x-6)$:
Calculons $(x-3)(4x+1)$:

$$\begin{aligned}(x-3)(4x+1) &= x \cdot 4x + x \cdot 1 - 3 \cdot 4x - 3 \cdot 1 \\ &= 4x^2 + x - 12x - 3 \\ &= 4x^2 - 11x - 3\end{aligned}$$

Ensuite, considérons $(x-3)(4x+1) - (x-6)$:

$$\begin{aligned}(x-3)(4x+1) - (x-6) &= 4x^2 - 11x - 3 - x + 6 \\ &= 4x^2 - 12x + 3\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons montré que pour tout réel x,

$$g(x) = (x-3)(4x+1) - (x-6)$$

Corrigé de l'exercice 24

1) Commençons par développer l'expression de $f(x)$:

$$f(x) = (1-2x)^2 - 9$$

Développons $(1-2x)^2$:

$$(1-2x)^2 = 1 - 4x + 4x^2$$

Donc,

$$f(x) = 1 - 4x + 4x^2 - 9$$

Simplifions l'expression :

$$f(x) = 4x^2 - 4x + 1 - 9$$
$$f(x) = 4x^2 - 4x - 8$$

Ainsi, nous avons montré que :

$$f(x) = 4x^2 - 4x - 8$$

2) Montrer que $f(x) = (4-2x)(-2-2x)$.
Pour montrer cette égalité, nous devons factoriser l'expression obtenue précédemment $f(x) = 4x^2 - 4x - 8$.
Cherchons à factoriser $4x^2 - 4x - 8$. Remarquons que :

$$4x^2 - 4x - 8 = 4(x^2 - x - 2)$$

Factorisons $x^2 - x - 2$:

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

Donc,

$$4(x^2 - x - 2) = 4(x-2)(x+1)$$

Cependant, nous devons exprimer $f(x)$ sous la forme $(4-2x)(-2-2x)$.
Considérons l'expression :

$$(4-2x)(-2-2x)$$

Développons cette expression :

$$\begin{aligned}(4-2x)(-2-2x) &= 4\cdot(-2)+4\cdot(-2x)-2x\cdot(-2)-2x\cdot(-2x)\\ &= -8-8x+4x+4x^2\\ &= 4x^2-4x-8\end{aligned}$$

Nous constatons que cette expression est équivalente à $f(x)$. Donc,

$$f(x) = (4-2x)(-2-2x)$$

Ainsi, nous avons montré que :

$$f(x) = (4-2x)(-2-2x)$$

Corrigé de l'exercice 25
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2-4x-30$$

1) Développons l'expression $(2x+6)(x-5)$ pour vérifier qu'elle est égale à $f(x)$:

$$\begin{aligned}(2x+6)(x-5) &= 2x\cdot x+2x\cdot(-5)+6\cdot x+6\cdot(-5)\\ &= 2x^2-10x+6x-30\\ &= 2x^2-4x-30\end{aligned}$$

Nous constatons que cette expression est égale à $f(x)$. Donc,

$$f(x) = 2x^2-4x-30 = (2x+6)(x-5)$$

Ainsi, nous avons montré que :

$$f(x) = (2x+6)(x-5)$$

2) Commençons par développer l'expression $(2x+2)(x-3)$:

$$\begin{aligned}(2x+2)(x-3) &= 2x(x-3)+2(x-3)\\ &= 2x^2-6x+2x-6\\ &= 2x^2-4x-6\end{aligned}$$

Maintenant, considérons $(2x+2)(x-3)-24$:

$$\begin{aligned}(2x+2)(x-3)-24 &= 2x^2-4x-6-24\\ &= 2x^2-4x-30\end{aligned}$$

Nous constatons que cette expression est équivalente à $f(x)$. Donc,

$$f(x) = (2x+2)(x-3)-24$$

Ainsi, nous avons montré que :

$$f(x) = (2x+2)(x-3) - 24$$

Corrigé de l'exercice 26

Développons les deux expressions dans A pour vérifier l'affirmation :

$$A = (x+3)(2x+1) - x(2x+7)$$

Calculons $(x+3)(2x+1)$:

$$(x+3)(2x+1) = x(2x+1) + 3(2x+1) = 2x^2 + x + 6x + 3 = 2x^2 + 7x + 3$$

Calculons $x(2x+7)$:

$$x(2x+7) = 2x^2 + 7x$$

Soustrayons ces deux résultats :

$$A = (2x^2 + 7x + 3) - (2x^2 + 7x) = 2x^2 + 7x + 3 - 2x^2 - 7x = 3$$

Ainsi, nous avons vérifié que :

$$A = 3$$

Nous avons montré que, quel que soit le nombre x, la valeur de A est toujours égale à 3. L'élève a donc raison.
Développons les expressions C et D pour vérifier s'ils sont égaux pour tous les réels x :

$$C = (2x+6)(x-4)$$

Développons $(2x+6)(x-4)$:

$$(2x+6)(x-4) = 2x(x-4) + 6(x-4) = 2x^2 - 8x + 6x - 24 = 2x^2 - 2x - 24$$

Développons maintenant $D = x(2x-2) - 24$:

$$D = x(2x-2) - 24 = 2x^2 - 2x - 24$$

Nous constatons que les deux expressions sont égales :

$$C = 2x^2 - 2x - 24$$

$$D = 2x^2 - 2x - 24$$

Ainsi, nous avons montré que :

$$C = D$$

pour tous les réels x.

Corrigé de l'exercice 27

1. $D = (a+5)^2 - (a-5)^2 = 20a$.
2. Avec $a = 10000$, on obtient $D = 200000$.

Corrigé de l'exercice 28

1) développer l'expression.
2) a) canonique : $3(3-3)^2 + 5 = 5$
   b) développer : $3\left(\sqrt{2}\right)^2 - 18\sqrt{2} + 32 = 38 - 18\sqrt{2}$
   c) développer : $0^2 - 18 \times 0 + 32 = 32$

Corrigé de l'exercice 29

1) L'aire d'un carré est donnée par côté^2.

$$\begin{aligned} A &= (2x+1)^2 \\ &= (2x+1)(2x+1) \\ &= 4x^2+4x+1. \end{aligned}$$

2) On utilise le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &= (x+1)^2 + (x+2)^2 \\ &= (x^2+2x+1) + (x^2+4x+4) \\ &= x^2+2x+1+x^2+4x+4 \\ &= 2x^2+6x+5. \end{aligned}$$

3) On a :

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= (x+5)^2 + (2x+2)^2 \\ &= x^2+10x+25+4x^2+8x+4 \\ &= 5x^2+18x+29. \end{aligned}$$

$BC^2 = 5x^2+16x+31$.

L'équation $5x^2+18x+29 = 5x^2+16x+31$ est équivalente à $2x-2=0$ qui a pour solution $x=1$.

Il existe une valeur de x pour laquelle ABC est rectangle en A : $x=1$.

4) On note A_1 l'aire du carré initial et A_2 celle du nouveau carré.

$$\begin{aligned} A_1 &= x^2 \\ A_2 &= (x+2)^2 \\ &= x^2+4x+4 \\ \Delta A &= A_2 - A_1 \\ &= (x^2+4x+4) - x^2 \\ &= 4x+4. \end{aligned}$$

L'affirmation de l'élève est que l'augmentation est $4x$.

En réalité, l'augmentation est $4x+4$, donc l'élève n'a pas raison.

5) On note A_1 l'aire du carré initial et A_2 celle du carré agrandi.

$$\begin{aligned} A_1 &= x^2 \\ A_2 &= (x+1)^2 \\ &= x^2+2x+1 \\ A_2 - A_1 &= (x^2+2x+1) - x^2 \\ &= 2x+1 \\ 2x+1 &= 5 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 30

1) • A avec $a=1$ et $b=5$.

$(a+b)^2 = (1+5)^2 = 6^2 = 36$, donc $A = 36$.

$(a-b)^2 = (1-5)^2 = (-4)^2 = 16$, donc $B = 16$.

$A - B = 36 - 16 = 20$.

$\frac{1}{4} \times 20 = 5$.

2) • Avec $a = -2$ et $b = -3$, on obtient :
$(a+b)^2 = (-2+(-3))^2 = (-5)^2 = 25$, donc $A = 25$.
$(a-b)^2 = (-2-(-3))^2 = 1^2 = 1$, donc $B = 1$.
$A - B = 25 - 1 = -24$.
$\frac{1}{4} \times 24 = 6$.

3) Pour démontrer cette conjecture,on utilise un calcul littéral.
On note les deux nombres choisis a et b. On obtient :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, donc $A = a^2 + 2ab + b^2$.

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, donc $B = a^2 - 2ab + b^2$.

$$\begin{aligned} A - B &= (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2) \\ &= \cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2} - \cancel{a^2} + 2ab - \cancel{b^2} \\ &= 4ab \end{aligned}$$

$\frac{1}{4} \times 4ab = ab$.
On vient de prouver que le résultat final est bien le produit des deux nombres de départ.

Corrigé de l'exercice 31
On traduit les données de l'énoncé :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= z^2, \\ (x+y)^2 &= 41, \\ (x-y)^2 &= 9. \end{aligned}$$

Nous devons trouver la valeur de z.
Tout d'abord, développons les deux équations fournies :

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= 41 \\ x^2 + 2xy + y^2 &= 41, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x-y)^2 &= 9 \\ x^2 - 2xy + y^2 &= 9. \end{aligned}$$

Nous avons donc le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2xy &= 41, \\ x^2 + y^2 - 2xy &= 9. \end{aligned}$$

Pour trouver $x^2 + y^2$ et xy, additionnons et soustrayons ces deux équations :

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + 2xy) + (x^2 + y^2 - 2xy) &= 41 + 9 \\ 2(x^2 + y^2) &= 50 \\ x^2 + y^2 &= 25, \end{aligned}$$

et maintenant, soustrayons les équations :

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + 2xy) - (x^2 + y^2 - 2xy) &= 41 - 9 \\ 4xy &= 32 \\ xy &= 8. \end{aligned}$$

Maintenant, nous savons que $x^2 + y^2 = 25$ et $xy = 8$.

Revenons à notre première équation :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= z^2 \\ 25 &= z^2 \\ z &= \sqrt{25} \\ z &= 5. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 32

1) Pour justifier l'égalité, on commence par le membre de gauche afin d'obtenir le membre de droite.

$$\begin{aligned} \frac{3}{4n} + \frac{1}{3n} + \frac{5}{12n} &= \frac{3 \times 3}{4n \times 3} + \frac{1 \times 4}{3n \times 4} + \frac{5}{12n} \\ &= \frac{9}{12n} + \frac{4}{12n} + \frac{5}{12n} \\ &= \frac{17}{12n} \end{aligned}$$

2) On identifie $\frac{3}{2n}$ à $\frac{3}{14}$. On obtient $n = 7$.
Avec $n = 7$, on a : $\frac{3}{14} = \frac{3}{28} + \frac{1}{21} + \frac{5}{84}$.

Corrigé de l'exercice 33

1) On exprime V en fonction de d et de k.

$$\begin{aligned} d &= k \times V^2 \\ V^2 &= \frac{d}{k} \\ V &= \sqrt{\frac{d}{k}}. \end{aligned}$$

2) On a :

$$\begin{aligned} & d = 15 \text{ m}, \quad k = 0{,}14 \text{ (sur route mouillée)} \\ & V = \sqrt{\frac{d}{k}} \\ & V = \sqrt{\frac{15}{0{,}14}} \\ & V \approx \sqrt{107{,}14} \\ & V \approx 10{,}35 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Pour convertir V de m/s en km/h :

$$\begin{aligned} V_{\text{km/h}} &= V \times 3{,}6 \\ V_{\text{km/h}} &\approx 10{,}35 \times 3{,}6 \\ V_{\text{km/h}} &\approx 37{,}26. \end{aligned}$$

Donc, la vitesse du véhicule est environ : $\boxed{37 \text{ km/h}}$

Corrigé de l'exercice 34

1) a) Choisissons le nombre 5.

1. $5 \times 4 = 20$
2. $5 - 2 = 3$
3. $3^2 = 9$
4. $20 + 9 = 29$

b) Choisissons le nombre 5.

1. $5^2 = 25$
2. $25 + 6 = 31$

Le résultat est donc 31.

2) Notons le nombre choisi x.

1. $x \times 4 = 4x$
2. $4x + (x-2)^2$
3. $4x + x^2 - 4x + 4$
4. $x^2 + 4$

3) Notons le nombre choisi x.

1. $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

Le résultat est donc $x^2 - 4x + 4$

4) Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier les réponses et écrire les étapes des éventuels calculs :

a) Choisissons le nombre $\frac{2}{3}$.

1. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$
2. $\frac{4}{9} + 6 = \frac{4}{9} + \frac{54}{9} = \frac{58}{9}$

L'affirmation est donc vraie.

b) Prenons un contre exemple : $n = 2$.

1. $n^2 = 4$
2. $4 + 6 = 10$ est un entier pair

L'affirmation est donc fausse.

c) Le résultat du programme B est $(x-2)^2$. Un carré est toujours positif.

L'affirmation est donc vraie.

d) Pour un nombre entier x, les résultats des programmes A et B sont respectivement $x^2 - 4x + 4$ et $x^2 + 4$.
• Si x est pair, alors il existe un entier p tel que $x = 2p$
$x^2 - 4x + 44p^2 - 8p + 4 = 4(p^2 - 2p + 1) = 4(p-1)^2$ qui est pair.
De même que $x^2 + 4 = 4p^2 + 4 = 4(p^2 + 1)$. Les deux résultats sont donc pairs.
• Si x est impair, alors il existe un entier p tel que $x = 2p + 1$

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 &= (2p+1)^2 - 4(2p+1) + 4 \\ &= 4p^2 + 4p + 1 - 8p - 4 + 4 \\ &= 4p^2 - 4p + 1 \\ &= 4(p^2 - p) + 1 \end{aligned}$$

qui est impair.

De même que

$$\begin{aligned} x^2 + 4 &= (2p+1)^2 + 4 \\ &= 4p^2 + 4p + 5 \\ &= 4(p^2 - p + 1) + 1 \end{aligned}$$

qui est impair>.
les deux résultats sont donc impairs.
x a donc la même parité que les deux programmes.
L'affirmation est vraie.

Corrigé de l'exercice 35

1) On a :

Nombre de départ $n = 3$.
L'entier juste après $n + 1 = 4$.
L'entier juste avant $n - 1 = 2$.
Carré de l'entier juste après $(n+1)^2 = 4^2 = 16$.
Carré de l'entier juste avant $(n-1)^2 = 2^2 = 4$.
Différence des carrés $(n+1)^2 - (n-1)^2 = 16 - 4 = 12$.
Retrancher 3 fois le nombre de départ à cette différence
$12 - 3 \times 3 = 12 - 9 = 3$.
Le résultat final est 3.

2) On a :

Nombre de départ $n = 10$.
L'entier juste après $n + 1 = 11$.
L'entier juste avant $n - 1 = 9$.
Carré de l'entier juste après $(n+1)^2 = 11^2 = 121$.
Carré de l'entier juste avant $(n-1)^2 = 9^2 = 81$.
Différence des carrés $(n+1)^2 - (n-1)^2 = 121 - 81 = 40$.
Retrancher 3 fois le nombre de départ à cette différence
$40 - 3 \times 10 = 40 - 30 = 10$.
Le résultat final est 10.

3) Conjecture : Le résultat final est toujours égal au nombre de départ.
Prouvons cette conjecture en utilisant un nombre entier n quelconque :

Nombre de départ n.
L'entier juste après $n + 1$.
L'entier juste avant $n - 1$.
Carré de l'entier juste après $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$.
Carré de l'entier juste avant $(n-1)^2 = n^2 - 2n + 1$.
Différence des carrés
$(n+1)^2 - (n-1)^2 = (n^2 + 2n + 1) - (n^2 - 2n + 1)$
$= n^2 + 2n + 1 - n^2 + 2n - 1$
$= 4n$.
Retrancher 3 fois le nombre de départ à cette différence
$4n - 3n = n$.
Le résultat final est n.

Donc, le résultat final est toujours égal au nombre de départ, ce qui confirme notre conjecture.