Corrigé de l'exercice 1

Le triangle GHI est rectangle en G donc d'après le théorème de Pythagore, on a :
$HI^2 = GH^2 + GI^2$
D'où $GH^2 = HI^2 - GI^2$.
$GH^2 = 5^2 - 4{,}1^2$
$GH^2 = 8{,}19$
$GH = \sqrt{8{,}19}$
Donc $GH \approx 2{,}9$ cm.

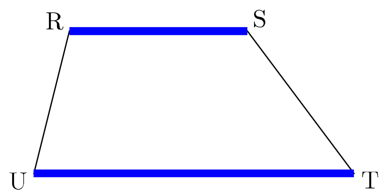
Corrigé de l'exercice 2

Dans le triangle KLM, le plus grand côté est $[KL]$.
$KL^2 = 2^2 = 4$
$KM^2 + LM^2 = 1{,}6^2 + 1{,}2^2 = 4$
On constate que $KL^2 = KM^2 + LM^2$, l'égalité de Pythagore est vérifiée.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle KLM est rectangle en M.

Corrigé de l'exercice 3

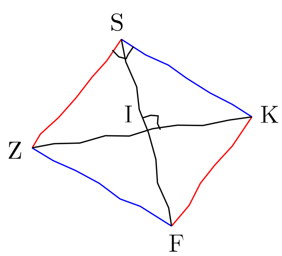
1) On sait que $HO = OJ$ et $IO = OK$.
Or, « si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme ».
Donc ***HIJK* est un parallélogramme**.

2) $RSTU$ a deux côtés opposés parallèles, ***RSTU* n'est donc pas forcément un parallélogramme** comme le montre le contre-exemple suivant (il s'agit d'un trapèze).



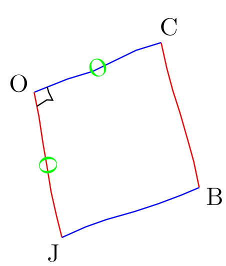
Corrigé de l'exercice 4

1) Les segments de même couleur sont parallèles sur le schéma suivant :



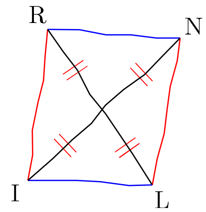
On sait que $[KS] \perp [SZ]$ et $[KZ] \perp [SF]$.
Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs perpendiculaires et des diagonales perpendiculaires, alors c'est un carré.
$KSZF$ est donc un carré.

2) Les segments de même couleur sont parallèles sur le schéma suivant :



On sait que $[CO] \perp [OJ]$ et $CO = OJ$.
Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs perpendiculaires et de même longueur, alors c'est un carré.
$COJB$ est donc un carré.

3) Les segments de même couleur sont parallèles sur le schéma suivant :



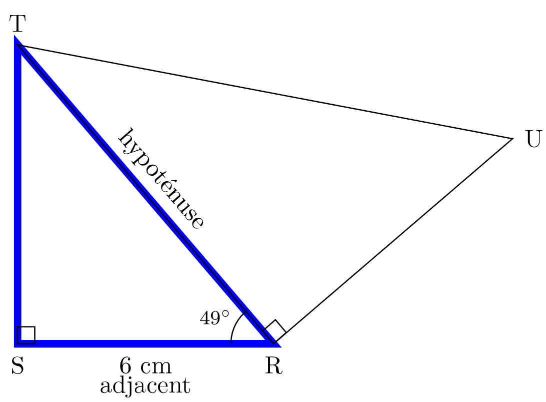
On sait que $NI = RL$.
Si un parallélogramme a des diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle.
$NRIL$ est donc un rectangle.

Corrigé de l'exercice 5

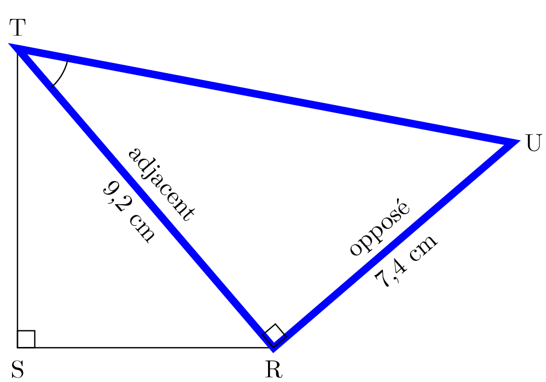
1) ■ c'est un parallélogramme.
☐ c'est un rectangle.
☐ c'est un carré.
Tous les losanges sont des parallélogrammes car ses côtés opposés sont parallèles. Certains losanges particuliers peuvent aussi être des carrés mais ce n'est pas toujours vrai.

2) ☐ c'est un parallélogramme.
☐ c'est un rectangle.
☐ c'est un losange.
☐ c'est un carré.
Si un quadrilatère non croisé a deux côtés consécutifs perpendiculaires de même longueur, alors cela peut être un quadrilatère quelconque.

Corrigé de l'exercice 6



TSR est rectangle en S.
Donc $\cos\left(\widehat{SRT}\right) = \dfrac{SR}{RT}$
Soit $\cos(49°) = \dfrac{6}{RT}$
$RT = \dfrac{6}{\cos(49°)} \approx 9{,}1$ cm.



TRU est rectangle en R.

Donc $\tan\left(\widehat{RTU}\right) = \dfrac{RU}{RT}$
Soit $\tan\left(\widehat{RTU}\right) \approx \dfrac{7{,}4}{9{,}1}$
$\widehat{RTU} \approx \tan^{-1}\left(\dfrac{7{,}4}{9{,}1}\right) \approx 39°$.
La somme des angles d'un triangle est égale à 180°.
Donc $\widehat{STR} = 180° - 90° - 49° = 41°$.
De même, $\widehat{TUR} \approx 180° - 90° - 39°$ et donc $\widehat{TUR} \approx 51°$.

Corrigé de l'exercice 7

1) $TUVW$ est un rectangle donc il possède 4 angles droits Le triangle UTV est rectangle en U donc d'après le théorème de Pythagore, on a :
$TV^2 = UT^2 + UV^2$
$TV^2 = 84^2 + 13^2$
$TV^2 = 7\,225$
$TV = \sqrt{7\,225}$
Donc $TV =$ **85 cm**.

2) Dans le triangle HIJ, le plus grand côté est $[HJ]$.
$HJ^2 = 2{,}8^2 = 7{,}84$
$HI^2 + IJ^2 = 1{,}5^2 + 2^2 = 6{,}25$
On constate que $HJ^2 \neq HI^2 + IJ^2$, l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée donc HIJ n'est pas rectangle en I.
Finalement, comme $HIJK$ n'a pas d'angle droit en I ce n'est pas un rectangle.

Corrigé de l'exercice 8

Dans le triangle STV, M est un point de $[ST]$, N est un point de $[SV]$ et (MN) est parallèle à (TV) donc d'après le théorème de Thalès on a :

$\dfrac{SM}{ST} = \dfrac{SN}{SV} = \dfrac{MN}{TV}$

$\dfrac{SM}{ST} = \dfrac{SN}{2} = \dfrac{1{,}6}{4}$

$SN = \dfrac{2 \times 1,6}{4} = 0{,}8$ cm

Les points S, N et V sont alignés dans cet ordre donc $NV = SV - SN = 2 - 0{,}8 = 1{,}2$ cm.

Corrigé de l'exercice 9

1) $AC^2 + BC^2 == 10,5^2 + 14^2 = 110,25 + 196 = 306,25$
$AB^2 = 17,5^2 = 306,25$
Puisque $AB^2 = AC^2 + BC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est bien rectangle en C.

2) Pour démontrer que $PRSC$ est un rectangle, nous devons prouver que $PRSC$ a des angles droits et que ses côtés opposés sont parallèles.
   — Par construction, $(PR)//(AC)$.
   — Par construction, $(RS)//(BC)$.

   Parce que (AC) et (BC) se coupent en C à angle droit (puisque ABC est rectangle en C), les parallèles respectives à (AC) et (BC) (qui sont (PR) et (RS)) se coupent également à angle droit.
   De plus, les côtés opposés sont parallèles :
   — $(PR)//(AC)$ et $(RS)//(BC)$.
   — $(PS)//(AB)$ et $(RC)//BC)$.

   Ainsi, $PRSC$ a quatre angles droits et des côtés opposés parallèles donc $PRSC$ est un rectangle.

3) a) On utilise le théorème de Thalès pour calculer PR.
   Les triangles BPR et BAC sont en configuration de Thalès, puisque les droites PR et AC sont parallèles.
   D'après le théorème de Thalès, nous avons :
$$\frac{BP}{BC} = \frac{BR}{BA} = \frac{PR}{AC}$$
   Soit :
$$\frac{5}{14} = \frac{PR}{10,5}$$
$$PR = 10,5 \times \frac{5}{14} = 10,5 \times \frac{5}{14} = 3,75 \text{ cm}$$
   b) $PR = 3,75$ cm et $PC = 9$ cm, donc l'aire est :
$$\text{Aire} = PR \times PC = 3,75 \times 9 = 33,75 \text{ cm}^2$$

Corrigé de l'exercice 10

1) O est le milieu de [AC] et de [BD] : ABCD est un parallélogramme ;
   AC = AO + OC = OB + OD = BD ; les diagonales de ce parallélogramme ont la même longueur : ABCD est donc un rectangle.
2) Si ABCD était un carré, alors ses diagonales seraient perpendiculaires et, dans ce cas, le triangle AOB serait rectangle.
   Le triangle AOB est-il rectangle ?
   D'une part, $AB^2 = 5^2 = 25$
   D'autre part, $AO^2 + OB^2 = 3,5^2 + 3,5^2 = 24,5$
   On constate que $AB^2 \neq AO^2 + OB^2$ et donc, d'après le théorème de Pythagore, AOB n'est pas rectangle et par conséquent, ABCD n'est pas un carré.

Corrigé de l'exercice 11
Figure 1
On a BC = CJ = JA = 6 cm. Donc CA = 12 cm.
On applique le théorème de Pythagore au triangle ABC rectangle en B :
$AC^2 = CB^2 + BA^2$
d'où $BA^2 = AC^2 - CB^2$
soit, $BA^2 = 12^2 - 6^2 = 144 - 36 = 108$.
Donc $AB = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \approx 10,39 \approx 10,4$ (cm).

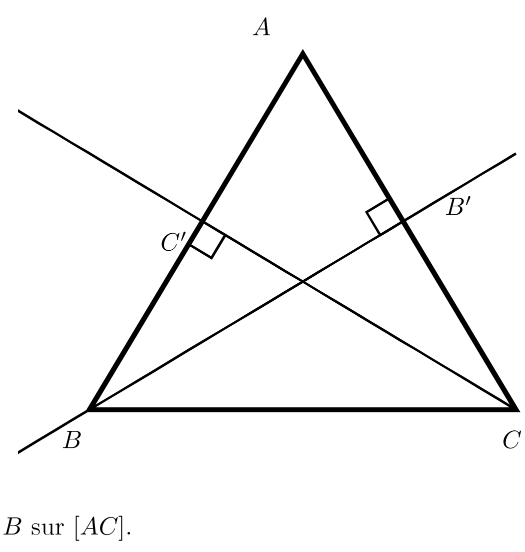
Figure 2
Par définition $\sin \widehat{C} = \dfrac{AB}{BC}$.
$\sin 53° = \dfrac{AB}{36}$
$AB = 36 \sin 53° \approx 28,750 \approx 28,8$ (cm).

Figure 3
On sait que la longueur du cercle est égale à $AB \times \pi$, d'où l'équation :
$AB \times \pi = 154$ et par conséquent $AB = \dfrac{154}{\pi} \approx 49,02 \approx 49$ cm.

Corrigé de l'exercice 12
Figure 1 Le quadrilatère ABCD a ses diagonales qui ont le même milieu O : c'est donc un parallélogramme et par conséquent les côtés opposés sont parallèles et (AB) et (CD) sont parallèles.
Figure 2 (ABE) est un triangle inscrit dans un cercle dont un des diamètres est l'un de ses côtés : il est donc rectangle en B.
Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires à la même droite (BC) : elles sont donc parallèles.

Corrigé de l'exercice 13

1) Figure :



2) B' est le projeté orthogonal de B sur $[AC]$.
3) C' est le projeté orthogonal de C sur $[AB]$.
   — **Méthode 1 :** En utilisant la base AB, on a :
   $$\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2} \times AB \times h_A$$
   où h_A est la hauteur issue de A à (AB).

— **Méthode 2 :** En utilisant la base AC, on a :

$$\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2} \times AC \times d_C$$

où d_C est la distance de C à la droite (AC).

En posant que les deux expressions de l'aire sont égales, nous avons :

$$\frac{1}{2} \times AB \times h_A = \frac{1}{2} \times AC \times d_C$$

Comme $AB = AC$, on a : :

$$h_A = d_C$$

En raison de la symétrie du triangle isocèle, il en découle que la distance de B à (AC) est également égale à la distance de C à (AB). Donc :

$$d_B = d_C$$

Corrigé de l'exercice 14

1) a) ABCD est un carré, donc ABC est un triangle rectangle isocèle en B.
Le théorème de Pythagore permet d'écrire :
$\text{AB}^2 + \text{BC}^2 = \text{AC}^2$
$10^2 + 10^2 = \text{AC}^2$
$\text{AC}^2 = 200$
Donc $\text{AC} = \sqrt{200}$.

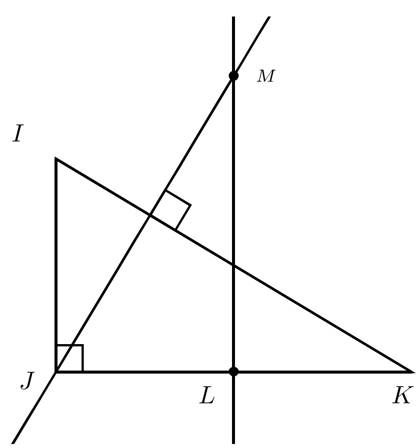
b) E appartient au cercle de centre A et de rayon AC, donc $\text{AE} = \text{AC} = \sqrt{200}$.

c) ABCD étant un carré, le triangle AED est rectangle en A et le théorème de Pythagore s'écrit :
$\text{DA}^2 + \text{AE}^2 = \text{ED}^2$,
$\text{ED}^2 = 10^2 + \left(\sqrt{200}\right)^2$
$\text{ED}^2 = 100 + 200$
$\text{ED}^2 = 300$, qui est égale à l'aire du carré DEFG.
Comme l'aire du carré ABCD est égale à $10^2 = 100$, on a bien aire(DEFG)= 3× aire (ABCD).

2) Comme $48 = 3 \times 16$, l'aire du carré ABCD est égale à 16 cm^2 ; or 16 est le carré de 4. Il faudra prendre une longueur AB = 4.

Corrigé de l'exercice 15

1) Figure :



2) Le point M se situe à l'intersection de la médiatrice de $[JK]$ et de la hauteur issue de J. Par définition de la médiatrice, le projeté orthogonal de M sur $[JK]$ est L, le milieu de $[JK]$.

3) Le projeté orthogonal de L sur $[IJ]$ est J, car IJK est un triangle rectangle en J.

4) Oui, les points M et L sont à la même distance de la droite (IJ).
La distance du point L à la droite (IJ) est JL.
La distance du point M à la droite (IJ) est la distance MH avec H projeté orthogonal de M sur (IJ).
Et on a $MH = JL$.