Corrigé de l'exercice 1

1) $-\dfrac{1}{8\times 8\times 8\times 8} = -8^{-4}$

2) $(-4)^4 = (-4)\times(-4)\times(-4)\times(-4)$

3) $3^3 = 3\times 3\times 3$

4) $-\dfrac{1}{(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)} = -(-3)^{-4}$

Corrigé de l'exercice 2

1) $0{,}306 = \mathbf{3{,}06\times 10^{-1}}$

2) $95\,000 = \mathbf{9{,}5\times 10^{4}}$

3) $900\,000 = \mathbf{9\times 10^{5}}$

Corrigé de l'exercice 3

1) $8\times 10^{-1} = 0{,}8$
2) $188\times 10^{2} = 18\,800$
3) $32{,}1\times 10^{-7} = 0{,}000\,003\,21$
4) $94{,}09\times 10^{2} = 9\,409$

Corrigé de l'exercice 4

1) $0{,}068\times 10^{3} = 0{,}068\times 1\,000 = 68 = \mathbf{6{,}8\times 10^{1}}$
2) $35\times 10^{-2} = 35\times 0{,}01 = 0{,}35 = \mathbf{3{,}5\times 10^{-1}}$
3) $0{,}37\times 10^{2} = 0{,}37\times 100 = 37 = \mathbf{3{,}7\times 10^{1}}$
4) $0{,}16\times 10^{-2} = 0{,}16\times 0{,}01 = 0{,}001\,6 = \mathbf{1{,}6\times 10^{-3}}$
5) $0{,}055\times 10^{3} = 0{,}055\times 1\,000 = 55 = \mathbf{5{,}5\times 10^{1}}$

Corrigé de l'exercice 5

1) $A = 10^{6}\times 10^{2}$
Il y a donc $\mathbf{6}+\mathbf{2}$ facteurs tous égaux à 10.
$A = 10^{6+2} = \mathbf{10^{8}}$

2) $B = \dfrac{10\times 10^{2}}{100^{2}} = \dfrac{10^{1+2}}{(10^{2})^{2}} = \dfrac{10^{1+2}}{10^{2\times 2}} = \dfrac{10^{3}}{10^{4}} = 10^{3-4} = \mathbf{10^{-1}}$

3) $C = \dfrac{1\,000^{3}}{10} = \dfrac{(10^{3})^{3}}{10} = \dfrac{10^{3\times 3}}{10} = \dfrac{10^{9}}{10} = 10^{9-1} = \mathbf{10^{8}}$

4) $D = \dfrac{10^{9}}{10^{8}}$
Il y a donc $\mathbf{8}$ simplifications par 10 possibles.
$D = 10^{9-8} = \mathbf{10^{1}}$

Corrigé de l'exercice 6

1) $-3^{2} = -(3\times 3) = -9$

2) $(-2)^{-9} = \dfrac{1}{(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)} = \dfrac{-1}{512}$

3) $(-2)^{8} = (-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2) = 256$

4) $-2^{5} = -(2\times 2\times 2\times 2\times 2) = -32$

Corrigé de l'exercice 7

1) $A = 5^{3}\times 8^{3}$
$A = (\mathbf{5}\times\mathbf{8})^{3} = \mathbf{40^{3}}$

2) $B = \dfrac{1}{5^{5-4}} = \dfrac{1}{5^{1}} = \mathbf{5^{-1}}$

3) Il y a donc $\mathbf{3}\times\mathbf{4}$ facteurs tous égaux à 3.
$C = 3^{4\times 3} = \mathbf{3^{12}}$

4) $D = 2^{3+2} = \mathbf{2^{5}}$

Corrigé de l'exercice 8

$A = \mathbf{(-7)^2} + 3 - 5 \times 1$
$A = 49 + 3 + \mathbf{(-5) \times 1}$
$A = 49 + 3 - 5$
$A = \mathbf{47}$

$B = \mathbf{(-2)^2} \times (-3 - 5 - 7)$
$B = 4 \times (\mathbf{-3 - 5 - 7})$
$B = 4 \times (-15)$
$B = \mathbf{-60}$

$C = 1 \times (\mathbf{(-2)^2} + 2 \times (-2))$
$C = 1 \times (4 + \mathbf{2 \times (-2)})$
$C = 1 \times (\mathbf{4 - 4})$
$C = 1 \times 0$
$C = \mathbf{0}$

$D = \mathbf{(-6)^2} + (-2) \times 6$
$D = 36 + \mathbf{(-2) \times 6}$
$D = 36 - 12$
$D = \mathbf{24}$

Corrigé de l'exercice 9

1) $\dfrac{3^5 \times 3^4}{9^2} \times 3 = \dfrac{3^{5+4}}{(3^2)^2} \times 3 = \dfrac{3^9}{3^{2\times 2}} \times 3 = \dfrac{3^9}{3^4} \times 3 = \dfrac{3^9 \times 3}{3^4} = \dfrac{3^{9+1}}{3^4} = \dfrac{3^{10}}{3^4} = 3^{10-4} = 3^6$

2) $\dfrac{4^7}{2} = \dfrac{(2^2)^7}{2} = \dfrac{2^{2\times 7}}{2} = \dfrac{2^{14}}{2} = 2^{14-1} = 2^{13}$

3) $\dfrac{27^2}{3} = \dfrac{(3^3)^2}{3} = \dfrac{3^{3\times 2}}{3} = \dfrac{3^6}{3} = 3^{6-1} = 3^5$

4) $\dfrac{8 \times 2}{4^4} = \dfrac{2^3 \times 2}{(2^2)^4} = \dfrac{2^{3+1}}{2^{2\times 4}} = \dfrac{2^4}{2^8} = 2^{4-8} = 2^{-4}$

Corrigé de l'exercice 10

I $= y^5$ J $= x^{16}$
K $= (xy)^{14}$ L $= -x^3y^4$
M = impossible à simplifier
N $= y$
O $= x^{-7}$
P $= x^{-3}y^4$
Q $= 0$

Corrigé de l'exercice 11

1) $a \times b = (2^3 \times 5^2) \times (2^5 \times 5^{-3}) = 2^{3+5} \times 5^{2+(-3)} = 2^8 \times 5^{-1}$

2) $a^3 = (2^3 \times 5^2)^3 = 2^9 \times 5^6$

Corrigé de l'exercice 12

On écrit les distances en écriture scientifique afin de les comparer.

Vénus : $1,05 \times 10^8$ Mars : $2,250 \times 10^8$ Terre : $1,5 \times 10^8$

La planète la plus éloignée de la terre est Mars.

Corrigé de l'exercice 13

— $A = \dfrac{7 \times 10^{15} \times 8 \times 10^{-8}}{5 \times 10^{-4}}$

$$\begin{aligned} A &= \frac{7 \times 10^{15} \times 8 \times 10^{-8}}{5 \times 10^{-4}} \\ &= \frac{56 \times 10^{15-8}}{5 \times 10^{-4}} \\ &= \frac{56 \times 10^{7}}{5 \times 10^{-4}} \\ &= \frac{56}{5} \times 10^{7+4} \\ &= 11,2 \times 10^{11} \\ &= 1,12 \times 10^{12} \end{aligned}$$

— $B = \dfrac{2.5 \times 10^{-3} \times 9 \times 10^5}{15 \times 10^{-4}}$

$$\begin{aligned} B &= \frac{2.5 \times 10^{-3} \times 9 \times 10^5}{15 \times 10^{-4}} \\ &= \frac{22,5 \times 10^{-3+5}}{15 \times 10^{-4}} \\ &= \frac{22,5 \times 10^2}{15 \times 10^{-4}} \\ &= \frac{22,5}{15} \times 10^{2+4} \\ &= 1,5 \times 10^6 \end{aligned}$$

— $C = \dfrac{2,6 \times 10^2 \times 1,7 \times 10^2}{0,2 \times 10^5 \times 10^3}$

$$\begin{aligned} C &= \frac{2.6 \times 10^2 \times 1.7 \times 10^2}{0,2 \times 10^5 \times 10^3} \\ &= \frac{4,42 \times 10^{2+2}}{0.2 \times 10^{5+3}} \\ &= \frac{4,42 \times 10^4}{0.2 \times 10^8} \\ &= \frac{4,42}{0.2} \times 10^{4-8} \\ &= 22,1 \times 10^{-4} \\ &= 2,21 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 14

1) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $2^n = 2^{n+1} - 2^n$

$$\begin{aligned} 2^{n+1} - 2^n &= 2 \times 2^n - 2^n \\ &= 2^n \times (2-1) \\ &= 2^n \times 1 \\ &= 2^n \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons montré que $2^{n+1} - 2^n = 2^n$ pour tout entier naturel n.

2) En déduire la valeur de :

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots + 2^{2\,000}$$

Pour trouver la valeur de cette somme, on peut remarquer que chaque terme de la somme est une puissance de 2. On peut additionner les termes en regroupant de la manière suivante :

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots + 2^{2000}$$

Si nous multiplions cette somme par 2, nous obtenons :

$$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots + 2^{2000} + 2^{2001}$$

Si nous soustrayons la somme de départ de cette somme doublée, nous obtenons :

$$\begin{aligned} 2S - S &= (2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots + 2^{2000} + 2^{2001}) - (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots + 2^{2000}) \\ S &= 2^{2001} - 1 \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons :

$$S = 2^{2001} - 1$$

3) Exprimer simplement en fonction de n la somme :

$$S_n = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots + 2^n$$

En utilisant la même méthode que précédemment, si nous multiplions cette somme par 2, nous obtenons :

$$2S_n = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots + 2^n + 2^{n+1}$$

Si nous soustrayons la somme de départ de cette somme doublée, nous obtenons :

$$\begin{aligned} 2S_n - S_n &= (2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots + 2^n + 2^{n+1}) - (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots + 2^n) \\ S_n &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons :

$$S_n = 2^{n+1} - 1$$

Corrigé de l'exercice 15

1) Pour obtenir un **ordre de grandeur** d'un nombre A dont l'écriture scientifique est $a \times 10^n$, on prend l'arrondi à l'unité de a et on conserve la puissance de 10.

   a) Donner un ordre de grandeur de 0,000 000 0254 et de 39 150.

$$0{,}000\,000\,0254 = 2{,}54 \times 10^{-8}$$

   L'arrondi à l'unité de 2,54 est 3, donc l'ordre de grandeur est :

$$0{,}000\,000\,0254 \approx 3 \times 10^{-8}$$

$$39\,150 = 3{,}915 \times 10^4$$

   L'arrondi à l'unité de 3,915 est 4, donc l'ordre de grandeur est :

$$39\,150 \approx 4 \times 10^4$$

2) La distance de la Terre au Soleil est en moyenne de 149 597 900 km.
   La vitesse de la lumière dans le vide est égale à environ 299 792 km/s.
   Mettons ces deux nombres sous forme scientifique et en déduisons un ordre de grandeur de chacun, puis calculons mentalement un ordre de grandeur du temps nécessaire (en secondes) à un rayon de lumière pour parcourir la distance Soleil-Terre.

$$149\,597\,900\,\text{km} = 1{,}495979 \times 10^8\,\text{km}$$

   L'arrondi à l'unité de 1,495979 est 1, donc l'ordre de grandeur est :

$$149\,597\,900\,\text{km} \approx 1 \times 10^8\,\text{km}$$

$$299\,792\,\text{km/s} = 2{,}99792 \times 10^5\,\text{km/s}$$

   L'arrondi à l'unité de 2,99792 est 3, donc l'ordre de grandeur est :

$$299\,792\,\text{km/s} \approx 3 \times 10^5\,\text{km/s}$$

   Pour estimer le temps nécessaire pour qu'un rayon de lumière parcoure la distance du Soleil à la Terre, nous utilisons les ordres de grandeur trouvés :

$$\text{Temps} = \frac{\text{Distance}}{\text{Vitesse}} = \frac{1 \times 10^8\,\text{km}}{3 \times 10^5\,\text{km/s}} = \frac{1}{3} \times 10^{8-5}\,\text{s} = \frac{1}{3} \times 10^3\,\text{s} \approx 333\,\text{s}$$

   Donc, un ordre de grandeur du temps nécessaire pour qu'un rayon de lumière parcoure la distance Soleil-Terre est de 333 s, soit environ 5 minutes et 33 secondes.