MATHEMATIQUES
Calcul littéral - Equations : entraînement 1 (corrigé)

Exercice 1

Conseil
Avant de développer, on identifie l'égalité remarquable que l'on va utiliser.

1. Le développement de $(x+3)^2$ se fait à l'aide de l'égalité remarquable :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ avec } a = x \text{ et } b = 3.$$

$$\begin{aligned}(x+3)^2 &= \underbrace{x^2}_{\text{carré de } x} + \underbrace{2 \times x \times 3}_{\substack{\text{double}\\\text{produit de } x\\\text{par } 3}} + \underbrace{3^2}_{\text{carré de } 3}\\ &= x^2 + 6x + 9\end{aligned}$$

Réponse : **c)** $x^2 + 6x + 9$.

Piège
$b = 2x$ donc $b^2 = (2x)^2$. Ne pas oublier les parenthèses !

2. Le développement de $(1-2x)^2$ se fait à l'aide de l'égalité remarquable :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ avec } a = 1 \text{ et } b = 2x.$$

$$\begin{aligned}(1-2x)^2 &= \underbrace{1^2}_{\text{carré de } 1} - \underbrace{2 \times 1 \times 2x}_{\substack{\text{double}\\\text{produit de } 1\\\text{par } 2x}} + \underbrace{(2x)^2}_{\text{carré de } 2x}\\ &= 1 - 4x + 4x^2\\ &= 4x^2 - 4x + 1\end{aligned}$$

Réponse : **a)** $4x^2 - 4x + 1$.

3. Le développement de $(5x+9)(5x-9)$ se fait avec l'égalité remarquable :

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \text{ avec } a = 5x \text{ et } b = 9.$$

$$\begin{aligned}(5x+9)(5x-9) &= \underbrace{(5x)^2}_{\text{carré de } 5x} - \underbrace{9^2}_{\text{carré de } 9}\\ &= 25x^2 - 81\end{aligned}$$

Réponse : **a)** $25x^2 - 81$.

Remarque
Ici, il s'agit de factoriser l'expression proposée.

4. $9x^2 - 9$ est une différence de deux carrés. En effet, $9x^2 = (3x)^2$ et $9 = 3^2$.
On utilise l'égalité remarquable :

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \text{ avec } a = 3x \text{ et } b = 3.$$

$$\begin{aligned} 9x^2 - 9 &= \underbrace{(3x)^2}_{\text{carré de } 3x} - \underbrace{3^2}_{\text{carré de 3}} \\ &= (3x-3)(3x+3) \end{aligned}$$

Réponse : **c)** $(3x-3)(3x+3)$.

5. On développe $(5x-7)^2$ et les résultats proposés :
- $(5x-7)^2 = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 7 + 7^2 = 25x^2 - 70x + 49$.
- $(7-5x)^2 = 7^2 - 2 \times 7 \times 5x + (5x)^2 = 49 - 70x + 25x^2$
- $(5x+7)^2 = (5x)^2 + 2 \times 5x \times 7 + 7^2 = 25x^2 + 70x + 49$
- $(5x-7)(5x+7) = (5x)^2 - 7^2 = 25x^2 - 49$.

Astuce du prof !

Deux nombres opposés ont le même carré. L'opposé de $5x-7$ est $7-5x$ et hop, on donne la réponse directement !

Réponse : **a)** $(7-5x)^2$.

6. On développe les expressions proposées :
- $(3x-4)(3x+4) = (3x)^2 - 4^2 = 9x^2 - 16$
- $(3x+4)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 4 + 4^2 = 9x^2 + 24x + 16$

A savoir

Une expression de la forme $a^2 + b^2$ ne se factorise pas (contrairement à une différence de deux carrés !)

Les deux réponses proposées sont incorrectes (les développements ne correspondent pas).
Réponse : **c)** Ne se factorise pas.

Exercice 2

1. Faux. Le développement de $(a-b)^2$ est $a^2 - 2ab + b^2$.

2. Vrai. $a^2 - 2ab + b^2$ est le développement de $(a-b)^2$. On en déduit que quels que soient les nombres a et b, $a^2 - 2ab + b^2$ est un nombre positif ou nul.

On rappelle

Le carré d'un nombre est un nombre positif ou nul.

3. Vrai. $x^2 - 9$ est une différence de deux carrés car $x^2 - 9 = (x)^2 - (3)^2$. On utilise donc l'égalité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ pour factoriser avec $a = x$ et $b = 3$.
On obtient $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$.

4. Faux. On développe séparément les deux calculs en utilisant l'égalité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$:
- $(2x+5)(2x-5) = (2x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25$.
- $(5+2x)(5-2x) = 5^2 - (2x)^2 = 25 - 4x^2$.

On ne trouve pas les même résultats.

Remarque

$4x^2 - 25$ et $25 - 4x^2$ sont des nombres opposés.

5. Faux. On développe $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ en utilisant l'égalité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = x$ et $b = \frac{1}{2}$.

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + 2 \times x \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}.$$

Rappel ?

$2 \times \frac{1}{2} = 1$.

6. Faux. . On développe séparément les deux calculs en utilisant l'égalité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:
• $(4+8x)^2 = 4^2 + 2\times 4\times 8x + (8x)^2 = 16 + 64x + 64x^2$.
• $2(2+4x)^2 = 2(2^2 + 2\times 2\times 4x + (4x)^2)$
$= 2(4 + 16x + 16x^2) = 8 + 32x + 32x^2$.

Astuce
$(4+8x)^2 = (2(2+4x))^2 = 2^2(2+4x)^2 = 4(2+4x)^2$.

On ne trouve pas le même résultat.

7. Vrai. . On développe séparément les deux calculs en utilisant les égalités remarquables $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

• $(\underbrace{-x}_{a} - \underbrace{5}_{b})^2 = (-x)^2 - 2\times(-x)\times 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$.
• $(x+5)^2 = x^2 + 2\times x\times 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$.

On trouve le même résultat.

Astuce
Les nombres $(x+5)$ et $(-x-5)$ sont deux nombres opposés et on sait que deux nombres opposés ont le même carré.

Exercice 3

1. Le côté mesure $2x+1$, donc l'aire est $(2x+1)^2$.

$$\begin{aligned}(2x+1)^2 &= (2x)^2 + 2\times 2x\times 1 + 1^2\\ &= 4x^2 + 4x + 1\end{aligned}$$

Rappel ?
L'aire d'un carré de côté c est c^2.

L'aire, en fonction de x est : $4x^2 + 4x + 1$.

2. ABC est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned}BC^2 &= AB^2 + AC^2\\ &= (x+1)^2 + (x+2)^2\\ &= (x^2 + 2\times x\times 1 + 1^2) + (x^2 + 2\times x\times 2 + 2^2)\\ &= x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4\\ &= 2x^2 + 6x + 5\end{aligned}$$

3. Si ABC est rectangle en A, alors on a l'égalité : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
• $BC^2 = 5x^2 + 16x + 31$.
• $AB^2 + AC^2 = (x+5)^2 + (2x+2)^2$
$= (x^2 + 2\times x\times 5 + 5^2) + ((2x)^2 + 2\times 2x\times 2 + 2^2)$
$= x^2 + 10x + 25 + 4x^2 + 8x + 4 = 5x^2 + 18x + 29$

ABC est rectangle en A si et seulement si

$$5x^2 + 18x + 29 = 5x^2 + 16x + 31$$

On obtient $2x = 2$ soit $x = 1$.
Il existe une valeur de x pour laquelle ABC est rectangle en A : $x = 1$.

Petit truc
En rassemblant les termes en x du même côté, on obtient une équation du premier degré.

4. En augmentant de 2 cm le côté du carré, il mesure alors $x+2$ cm.
$(x+2)^2 = x^2 + 2\times x\times 2 + 2^2 = x^2 + 4x + 4$. Son aire est donc $x^2 + 4x + 4$ cm^2.
L'aire du carré initial est x^2 cm^2. On en déduit que l'aire augmente de $4x+4$ cm^2 et non de $4x$ cm^2. L'élève a donc tort.

5. Soit x le côté du carré initial. Son aire est x^2 m^2.
On augmente son côté de 1 m, donc il mesure $(x+1)$ m.
La différence entre l'aire du carré initial et celle du carré modifié est 5 m^2.
D'où $(x+1)^2 - x^2 = 5$ soit $\cancel{x^2} + 2x + 1 - \cancel{x^2} = 5$

L'équation à résoudre est donc : $2x + 1 = 5$ qui a pour solution $x = 2$.
La longueur du côté du carré initial est 2 m.

Méthode
On traduit les données de l'énoncé par une équation. En la résolvant, on trouve la solution.

Exercice 4

1. $\dfrac{2 \times 3^2 - 3}{5} = \dfrac{2 \times 9 - 3}{5} = \dfrac{15}{5} = 3$.
Pour $x = 3$, l'égalité est vérifiée, on en déduit que 3 est solution de l'équation (E).
2. a.

$$\begin{array}{rcl} (x-3)(2x+1) & = & x \times 2x + x \times 1 - 3 \times 2x - 3 \times 1 \\ & = & 2x^2 + x - 6x - 3 \\ & = & 2x^2 - 5x - 3 \text{ Forme développée} \end{array}$$

2. b. Par produit en croix, l'équation $\dfrac{2 \times x^2 - 3}{5} = x$ s'écrit $2x^2 - 3 = 5 \times x$, soit $2x^2 - 5x - 3 = 0$.
On retrouve le développement précédent.
On en déduit que résoudre $\dfrac{2 \times x^2 - 3}{5} = x$ revient à résoudre $(x-3)(2x+1) = 0$.

Automatisme
Quand il y a des quotients, on pense aux produits en croix.

3. Il s'agit d'une équation produit nul :

$$\begin{array}{rcl} x - 3 = 0 & \text{ou} & 2x + 1 = 0 \\ x = 3 & \text{ou} & 2x = -1 \\ x = 3 & \text{ou} & x = \dfrac{-1}{2} \end{array}$$

Les solutions de l'équation (E) sont 3 et $\dfrac{-1}{2}$.

Exercice 5

1. • Choisir un nombre : soit x ce nombre.
• Ajouter 1, puis élever la somme au carré : $(x+1)^2$
• Ajouter 4 fois le nombre de départ : $(x+1)^2 + 4x$
• Ecrire le résultat : $(x+1)^2 + 4x$.

2. Le résultat en fonction de x est $(x+1)^2 + 4x$.
Le résultat doit être le carré du nombre initial soit x^2.

3. On obtient donc l'équation

$$(x+1)^2 + 4x = x^2$$

4.

$$\begin{array}{rcl} (x+1)^2 + 4x & = & x^2 \\ x^2 + 2x + 1 + 4x & = & x^2 \\ \cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 6x & = & -1 \\ x & = & \dfrac{-1}{6} \end{array}$$

Il faut y penser
Quand on ne voit rien d'autre, on développe pour résoudre l'équation.

5. Le nombre que l'on doit choisir pour obtenir son carré comme résultat est : $\dfrac{-1}{6}$.