MATHEMATIQUES
Calcul littéral et équations : entraînement savoir-faire (corrigé)

Exercice 1

Méthode

1. On repère dans l'expression le produit remarquable à développer qui est de la forme $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ ou $(a+b)(a-b)$.
2. On écrit l'identité remarquable à développer en identifiant a et b. La forme développée est alors $a^2+2ab+b^2$ ou $a^2-2ab+b^2$ ou encore a^2-b^2.
3. On applique les règles de priorités opératoires habituelles pour terminer le calcul.

$$\begin{aligned} A &= (4x-1)^2 \\ &= \underbrace{(4x)^2}_{\text{carré de } 4x} - \underbrace{2\times 4x\times 1}_{\substack{\text{double} \\ \text{produit de } 4x \\ \text{par } 1}} + \underbrace{1^2}_{\text{carré de } 1} \\ &= 4x^2-8x+1 \end{aligned}$$

Méthode

On utilise l'égalité $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ avec $a = 4x$ et $b = 1$.

$$\begin{aligned} B &= (2+4x)^2 \\ &= \underbrace{2^2}_{\text{carré de } 2} + \underbrace{2\times 2\times 4x}_{\substack{\text{double} \\ \text{produit de } 2 \\ \text{par } 4x}} + \underbrace{(4x)^2}_{\text{carré de } 4x} \\ &= 4+16x+16x^2 \\ &= 16x^2+16x+4 \end{aligned}$$

Méthode

On utilise l'égalité $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ avec $a = 2$ et $b = 4x$.

$$\begin{aligned} C &= (5-2x)^2 \\ &= \underbrace{5^2}_{\text{carré de } 5} - \underbrace{2\times 5\times 2x}_{\substack{\text{double} \\ \text{produit de } 5 \\ \text{par } 2x}} + \underbrace{(2x)^2}_{\text{carré de } 2x} \\ &= 25-20x+4x^2 \\ &= 4x^2-20x+25 \end{aligned}$$

Méthode

On utilise l'égalité $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ avec $a = 5$ et $b = 2x$.

$$\begin{aligned} D &= (2x-6)(2x+6) \\ &= \underbrace{(2x)^2}_{\text{carré de } 2x} - \underbrace{6^2}_{\text{carré de } 6} \\ &= 4x^2-36 \end{aligned}$$

Méthode

On utilise l'égalité $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$ avec $a = 2x$ et $b = 6$.

$$\begin{aligned}
E &= 4-\underbrace{(2x+1)^2}_{(a+b)^2}\\
&= 4-(\underbrace{(2x)^2}_{\text{carré de } 2x} + \underbrace{2\times 2x\times 1}_{\substack{\text{double}\\ \text{produit de } 2x\\ \text{par } 1}} + \underbrace{1^2}_{\text{carré de } 1})\\
&= 4-(4x^2+4x+1)\\
&= 4-4x^2-4x-1\\
&= -4x^2-4x+3
\end{aligned}$$

Attention

La parenthèse est précédée d'un signe « − », on change les signes.

$$\begin{aligned}
F &= \underbrace{(2x+6)^2}_{(a+b)^2}-\underbrace{(x-1)^2}_{(a-b)^2}\\
&= ((2x)^2+2\times 2x\times 6+6^2)-(x^2-2\times x\times 1+1^2)\\
&= (4x^2+24x+36)-(x^2-2x+1)\\
&= 4x^2+24x+36-x^2+2x-1\\
&= 3x^2+26x+35
\end{aligned}$$

Conseil

On développe les deux parenthèses simultanément, puis on fait attention au signe − devant la seconde parenthèse.

$$\begin{aligned}
G &= \underbrace{\left(\frac{2}{3}x+\frac{2}{5}\right)^2}_{(a+b)^2}\\
&= \left(\frac{2}{3}x\right)^2+2\times\frac{2}{3}x\times\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2\\
&= \frac{4}{9}x^2+\frac{8}{15}x+\frac{4}{25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H &= \underbrace{\left(\frac{x}{5}+\frac{2}{3}\right)\left(\frac{x}{5}-\frac{2}{3}\right)}_{(a+b)(a-b)}\\
&= \left(\frac{x}{5}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2\\
&= \frac{x^2}{25}-\frac{4}{9}
\end{aligned}$$

Exercice 2

$$\begin{aligned} A &= x^2+4x+4 \\ &= \underbrace{x^2}_{a^2}+\underbrace{2\times x\times 2}_{2\times a\times b}+\underbrace{2^2}_{b^2} \\ &= \underbrace{(x+2)^2}_{(a+b)^2} \end{aligned}$$

Méthode
On utilise l'égalité $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ avec $a=x$ et $b=2$.

$$\begin{aligned} B &= x^2-4 \\ &= \underbrace{x^2}_{a^2}-\underbrace{2^2}_{b^2} \\ &= \underbrace{(x-2)(x+2)}_{(a-b)(a+b)} \end{aligned}$$

Méthode
On utilise l'égalité $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ avec $a=x$ et $b=2$.

$$\begin{aligned} C &= 25x^2+20x+4 \\ &= \underbrace{(5x)^2}_{a^2}+\underbrace{2\times 5x\times 2}_{2\times a\times b}+\underbrace{2^2}_{b^2} \\ &= \underbrace{(5x+2)^2}_{(a+b)^2} \end{aligned}$$

Méthode
On utilise l'égalité $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ avec $a=5x$ et $b=2$.

$$\begin{aligned} D &= 4x^2-12x+9 \\ &= \underbrace{(2x)^2}_{a^2}-\underbrace{2\times 2x\times 3}_{2\times a\times b}+\underbrace{3^2}_{b^2} \\ &= \underbrace{(2x-3)^2}_{(a-b)^2} \end{aligned}$$

Méthode
On utilise l'égalité $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ avec $a=2x$ et $b=3$.

$$\begin{aligned} E &= (2x+1)^2-9 \\ &= \underbrace{(2x+1)^2}_{a^2}-\underbrace{3^2}_{b^2} \\ &= \underbrace{(2x+1+3)(2x+1-3)}_{(a+b)(a-b)} \\ &= (2x+4)(2x-2) \end{aligned}$$

Méthode
On utilise l'égalité $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ avec $a=2x+1$ et $b=3$.

$$\begin{aligned} F &= x^2-2x+1 \\ &= \underbrace{x^2-2\times x\times 1+1}_{a^2-2ab+b^2} \\ &= \underbrace{(x-1)^2}_{(a-b)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= \frac{9}{16}x^2+x+\frac{4}{9} \\ &= \underbrace{\left(\frac{3}{4}x\right)^2}_{a^2}+\underbrace{2\times\frac{3}{4}x\times\frac{2}{3}}_{2\times a\times b}+\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^2}_{b^2} \\ &= \underbrace{\left(\frac{3}{4}x+\frac{2}{3}\right)^2}_{(a+b)^2} \end{aligned}$$

Exercice 3

Méthode pour mettre au même dénominateur

1. On précise les valeurs interdites éventuelles en résolvant les équations "dénominateur = 0 ".
2. On prend (bien souvent, mais pas tout le temps) comme dénominateur commun le produit des dénominateurs. N'oubliez pas par exemple que $4 = \dfrac{4}{1}$.
3. On écrit les quotients avec les mêmes dénominateurs. Normalement vous savez le faire : on utilise $\dfrac{a}{b} = \dfrac{k \times a}{k \times b}$. Par exemple $\dfrac{4}{1} = \dfrac{4(x+9)}{1(x+9)}$.
4. On écrit la somme somme ou la différence sous la forme d'un sel quotient.
5. On réduit le numérateur. Pas touche au dénominateur !

1. • Pour tout réel x différent de 0,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{x} + 4 \\ &= \frac{1}{x} + \frac{4x}{x} \quad \text{Mise au même dénominateur : } x \\ &= \frac{1+4x}{x} \quad \text{Un seul quotient.} \end{aligned}$$

Pensez-y !

Précisez les valeurs interdites avant de commencer les calculs.

• Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 0\}$,

$$\begin{aligned} B &= \frac{3}{x} + \frac{1}{]}x + 1 \\ &= \frac{3(x+1)}{x(x+1)} + \frac{1x}{(x+1)x} \quad \text{Mise au même dénominateur : } x(x+1) \\ &= \frac{3(x+1)+1x}{x(x+1)} \quad \text{Un seul quotient.} \\ &= \frac{4x+3}{x(x+1)} \quad \text{plus joli comme ça.} \end{aligned}$$

Valeurs interdites

Pour cette expression, il y a deux valeurs interdites : -1 et 0. Ce sont les valeurs qui annulent le dénominateur.

2. • Pour tout réel x différent de 5,

$$\begin{aligned} C &= \frac{x}{x-5} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{x \times 3}{(x-5) \times 3} + \frac{2 \times (x-5)}{3 \times (x-5)} \quad \text{Mise au même dénominateur : } 3(x-5) \\ &= \frac{3x}{x(x-5)} + \frac{2(x-5)}{3(x-5)} \\ &= \frac{3x+2(x-5)}{3(x-5)} \quad \text{Un seul quotient.} \\ &= \frac{5x-10}{3(x-5)} \quad \text{plus joli comme ça.} \end{aligned}$$

Valeur interdite

Pour la trouver il fallait résoudre l'équation $x - 5 = 0$.... ça va aller ?

3. Pour tout réel x différent de 1,

$$\begin{aligned} \frac{2x+5}{x-1} - 2 &= \frac{2x+5}{x-1} - \frac{2(x-1)}{x-1} \quad \text{Mise au même dénominateur : } x-1 \\ &= \frac{2x+5-2(x-1)}{x-1} \\ &= \frac{\cancel{2x}+5-\cancel{2x}+2}{x-1} \\ &= \frac{7}{x-1} \end{aligned}$$

Méthode

Pour montrer une égalité, une méthode consiste à partir d'un côté (d'un membre) de l' égalité et d' "arriver" à l'autre. Ici, on est parti de $\dfrac{2x+5}{x-1} - 2$ et on est arrivé à $\dfrac{7}{x-1}$.

Exercice 4

Méthode

Pour une équation du type $\dfrac{A}{B} = 0$:
- On indique les valeurs interdites éventuelles (ces nombres ne peuvent pas être solution de l'équation).
- On utilise le résultat : **lorsque B est non nul** : $\dfrac{A}{B} = 0 \Longleftrightarrow A = 0$.
- On écrit les solutions de l'équation en vérifiant qu'il n'y a pas de valeur interdite.

Pour une équation du type $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$:
- On indique les valeurs interdites éventuelles (ces nombres ne peuvent pas être solution de l'équation).
- On utilise le résultat : **lorsque B et D sont non nuls** : $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D} \Longleftrightarrow A \times D = B \times C$.
- On résout l'équation ainsi obtenue.
- On écrit les solutions de l'équation en vérifiant qu'il n'y a pas de valeur interdite.

- $\dfrac{3x+5}{x-9} = 0$ est une équation du type $\dfrac{A}{B} = 0$.

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{9\}$:

Ne pas oublier

9 est une valeur interdite. Cela signifie que 9 ne peut pas être solution de cette équation.

$$\begin{aligned} \frac{3x+5}{x-9} &= 0 \\ 3x+5 &= 0 \\ 3x &= -5 \\ x &= -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

L'équation a une solution $-\dfrac{5}{3}$.

- L'équation $\dfrac{6x}{x^2+1} = 0$ est équation du type $\dfrac{A}{B} = 0$.

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \frac{6x}{x^2+1} &= 0 \\ 6x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Ne pas oublier

L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution, donc on résout cette équation dans $\mathbb{R}$.

L'équation a une solution 0.

- L'équation $\dfrac{x^2-4}{x} = 0$ est équation du type $\dfrac{A}{B} = 0$.

Pour tout réel x différents de 0 :

$$\begin{aligned} \frac{x^2-4}{x} &= 0 \\ x^2-4 &= 0 \\ x^2 &= 4 \\ x = 2 \quad &\text{ou} \quad x = -2 \end{aligned}$$

Equation $x^2 = a$

Cette équation a deux solutions si $a > 0$: $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.

L'équation a deux solutions -2 et 2.

- L'équation $\dfrac{x+6}{3-x} = 2$ est équation du type $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$.

Pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{x+6}{3-x} & = & \dfrac{2}{1} \\ x+6 & = & 2 \times (3-x) \\ x+6 & = & 6-2x \\ x+2x & = & 6-6 \\ 3x & = & 0 \\ x & = & 0 \end{array}$$

Méthode

On écrit l'égalité des produits en croix.

L'équation a une solution 0.

Exercice 5

1. a. L'expression du périmètre P en fonction de x est : $P = 4x$.

b. L'expression de son aire A en fonction de x est : $A = x^2$.

L'idée

Puisque l'on a A en fonction de x et P en fonction de x, on écrit x en fonction de P et on remplace x par l'expression trouvée dans $A = x^2$ pour obtenir A en fonction de P.

c. Comme $P = 4x$, on a $x = \dfrac{P}{4}$.

Ainsi, $A = x^2 = \left(\dfrac{P}{4}\right)^2 = \dfrac{P^2}{16}$.

En fait

Pour **a.** Dans l'égalité $U = e - rI$, on ajoute dans chaque membre rI et hop !
Pour **b.** On retranche e dans chaque membre puis on divise par $-r$ et encore hop !

2. a. De l'égalité $U = e - rI$, on déduit $e = U + rI$.

b. On a $e - rI = U$ d'où $-rI = U - e$ soit $I = \dfrac{U-e}{-r} = -\dfrac{U-e}{r}$.