MATHEMATIQUES
Droites et systèmes : entraînement savoir-faire 1 (corrigé)

Exercice 1

Méthode

Vous avez deux options pour représenter une droite :
- Vous pouvez utiliser un tableau pour déterminer les coordonnées de deux points de la droite.
- Vous pouvez utiliser le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine : l'ordonnée à l'origine est donnée par le nombre p. Le coefficient directeur (la pente de la droite) est donnée par le nombre

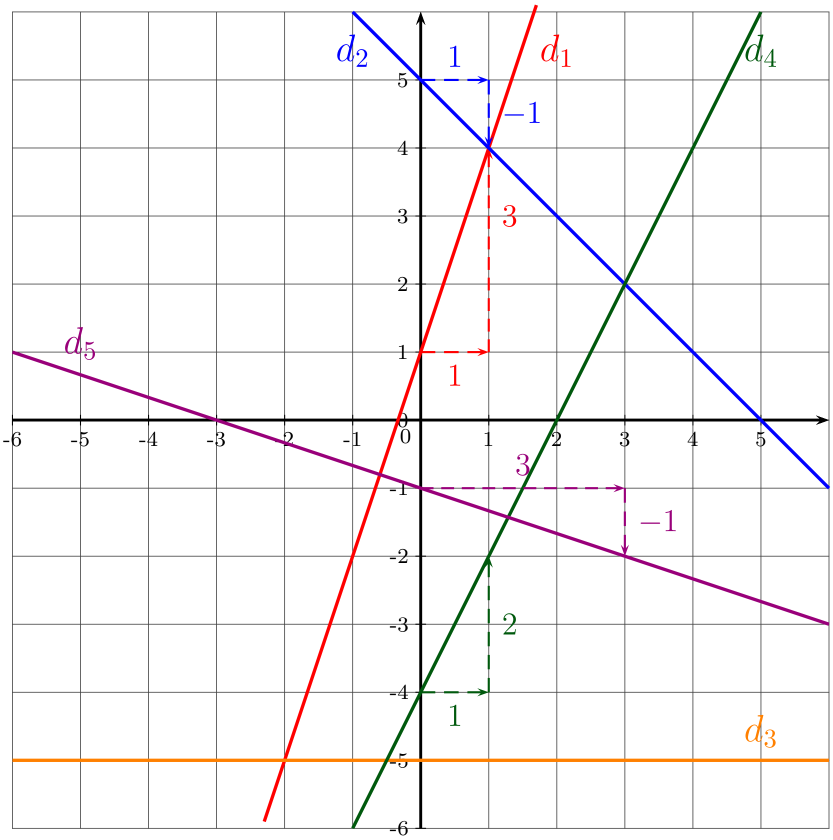
$$m = \frac{\text{"Déplacement vertical"}}{\text{"Déplacement horizontal"}}$$

On prend un déplacement d'une unité horizontale lorsque le coeffcient directeur m est un nombre entier.
Le deuxième méthode est beaucoup plus rapide.

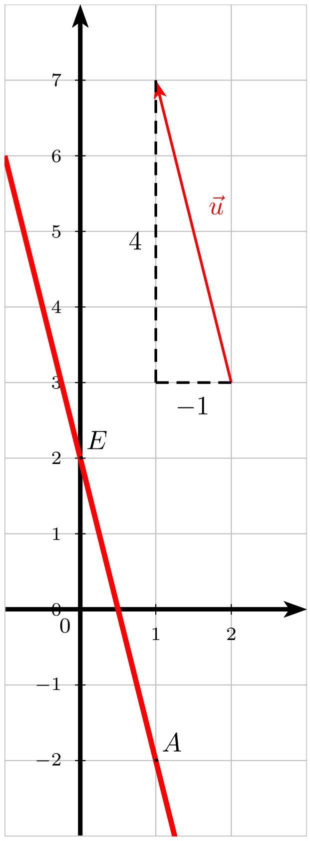
- Pour d_1 : $m = 3$ et $p = 1$.
- Pour d_2 : $m = -1$ et $p = 5$.
- Pour d_3 : $m = 0$ et $p = -5$ (la droite est horizontale).
- Pour d_4 : l'équation $2x - y - 4 = 0$, s'écrit $y = 2x - 4$. On a ainsi : $m = 2$ et $p = -4$.
- Pour d_5 : $m = -\frac{1}{3}$ et $p = -1$.

Méthode

Pour d_5, la pente est $\frac{-1}{3}$. A partir de l'ordonnée à l'origine, on se décale de 3 unités (déplacement horizontal : 3) et on descend d'une unité (déplacement vertical : -1).



Exercice 2



Méthode

On place le point A et à partir de ce point, on trace un vecteur égal au vecteur $\vec{u}$.
On a sur la figure $\overrightarrow{AE} = \vec{u}$.
On obtient ainsi un deuxième point de la droite, le point E.

Une équation cartésienne de la droite d est : $ax + by + c = 0$.

Comme $\vec{u}(\underbrace{-1}_{-b}\ ;\ \underbrace{4}_{a})$, on a :

$d\ :\ 4x + y + c = 0$.

Le point $A(1\ ;\ -2)$ est sur la droite d donc ses coordonnées vérifient l'équation de la droite :

Ainsi : $4 \times 1 + (-2) + c = 0$ soit $c = -2$.

Une équation cartésienne de la droite d est donc :

$$4x + y - 2 = 0$$

Exercice 3

Méthode

C'est l'opération inverse de l'exercice précédent.
• On lit l'ordonnée à l'origine à l'intersection de la droite et de l'axe des ordonnées.
• Pour le coefficient directeur : on se place sur un point de la droite bien choisi (par exemple, l'ordonnée à l'origine) et on se décale vers la droite d'autant d'unités qu'il faut pour retrouver un "beau" point de la droite par un déplacement vertical. Le coefficient directeur est alors donné par :

$$m = \frac{\text{"Déplacement vertical"}}{\text{"Déplacement horizontal"}}$$

On compte négativement quand on descend verticalement (une droite qui monte a une pente positive et une droite qui descend a une pente négative).

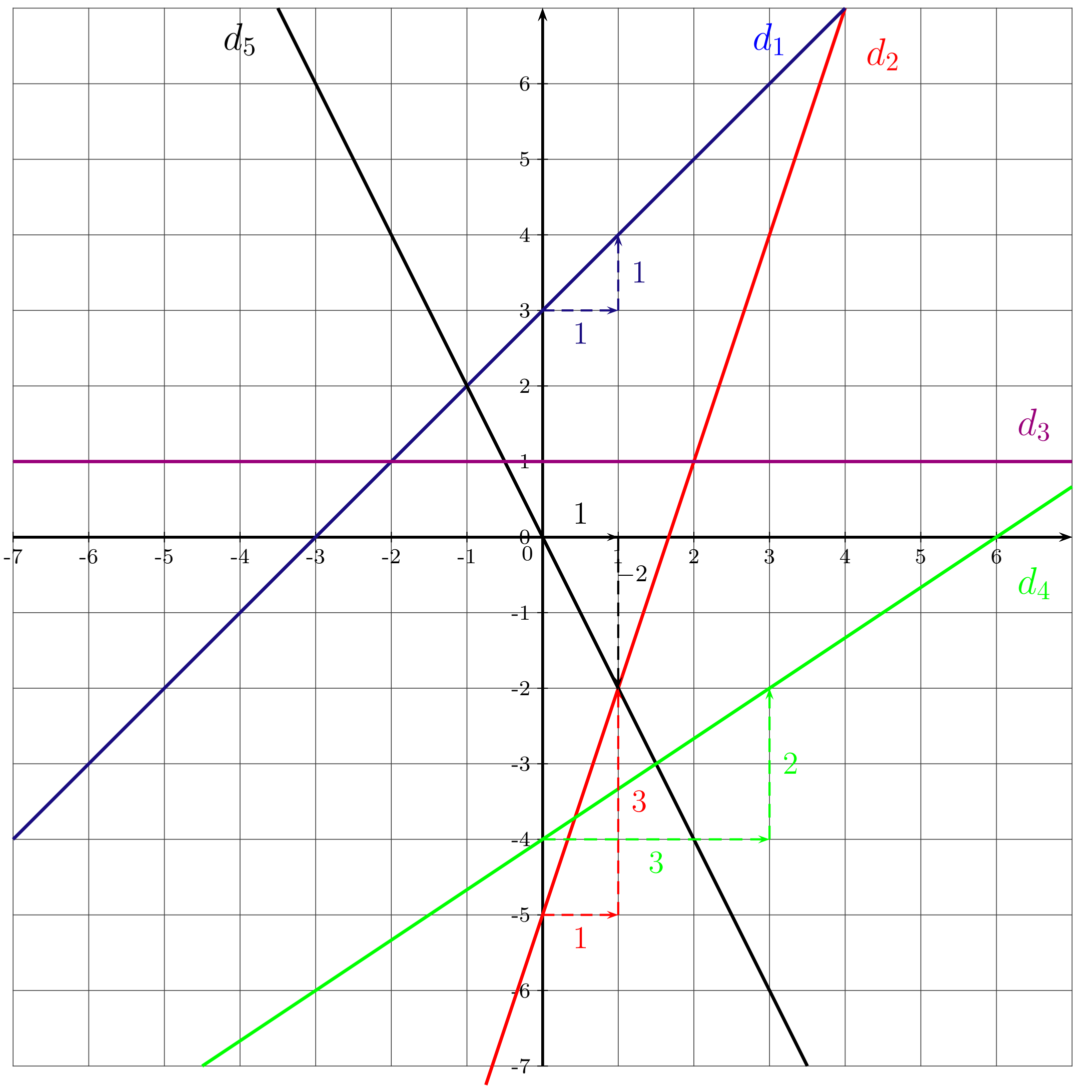
- d_1 : on a $m = 1$ et $p = 1$. Donc elle représente la fonction affine f_1 définie par $f_1(x) = x + 3$.

- d_2 : on a $m = 3$ et $p = -5$. Donc elle représente la fonction affine f_2 définie par $f_2(x) = 3x - 5$.

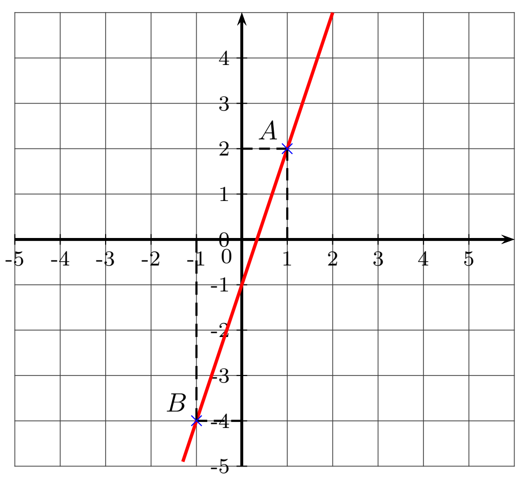
- d_3 : on a $m = 0$ et $p = 1$. Donc elle représente la fonction affine f_3 définie par $f_3(x) = 1$.

- d_4 : on a $m = \dfrac{2}{3}$ et $p = -4$. Donc elle représente la fonction affine f_4 définie par $f_4(x) = \dfrac{2}{3}x - 4$.

- d_5 : on a $m = -2$ et $p = 0$. Donc elle représente la fonction affine f_5 définie par $f_5(x) = -2x$.



Exercice 4



On cherche l'équation réduite de la droite (AB). Elle est de la forme : $y = mx + p$.

$m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-4-2}{-1-1} = \dfrac{-6}{-2} = 3.$

On a donc : $y = 3x + p$.

En choisissant le point A, comme le point appartient à la droite (AB) ses coordonnées vérifient son équation et on obtient $3 \times x_A + p = y_A$.

Remarque
On pouvez choisir le point B

$$\begin{aligned} 3 \times \underbrace{x_A}_{=1} + p &= \underbrace{y_A}_{=2} \\ 3 \times 1 + p &= 2 \\ 3 + p &= 2 \\ p &= 2 - 3 \\ p &= -1 \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation réduite de la droite (AB) est $y = 3x - 1$.

Exercice 5

1. Méthode 1 :

La droite d a une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$. Un vecteur directeur est $\vec{u}(\underbrace{1}_{=-b} \; ; \; \underbrace{-2}_{=a})$.

Ainsi, $b = -1$ et $a = -2$.

Donc une équation de d est $-2x - y + c = 0$.
Comme le point $A(-2 \; ; \; 4)$ est sur d, ses coordonnées vérifient l'équation de la droite : $-2 \times (-2) - 4 + c = 0$ soit $c = 0$.

Ainsi, une équation cartésienne de d est : $-2x - y = 0$.

Méthode 2 :

La droite d est l'ensemble des points $M(x \; ; \; y)$ tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+2 \\ y-4 \end{pmatrix}$.

Le critère de colinéarité donne : $-2(x+2) - 1(y-4) = 0$ soit $-2x - y = 0$.

2. Méthode 1 :

La droite d' a une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$. Un vecteur directeur est $\vec{v}(\underbrace{-6}_{=-b} \; ; \; \underbrace{4}_{=a})$.

Ainsi, $b = 6$ et $a = 4$.

Donc une équation de d' est $4x + 6y + c = 0$.
Comme le point $B(2 \; ; \; 1)$ est sur d', ses coordonnées vérifient l'équation de la droite : $4 \times 2 + 6 \times 1 + c = 0$ soit $c = -14$.

Ainsi, une équation cartésienne de d est : $4x + 6y - 14 = 0$.

Méthode 2 :

La droite d' est l'ensemble des points $M(x \; ; \; y)$ tels que $\overrightarrow{BM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix}$.

Le critère de colinéarité donne : $4(x-2) - (-6)(y-1) = 0$ soit $4x + 6y - 14 = 0$.