MATHEMATIQUES

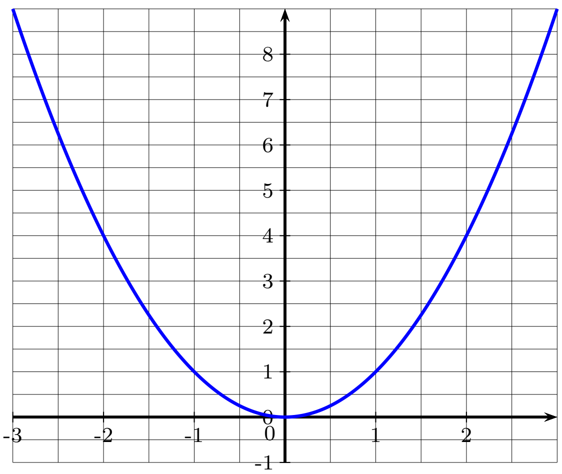
Généralités sur les fonctions. Fonctions de référence : entraînement savoir-faire 2 (corrigé)

Exercice 1

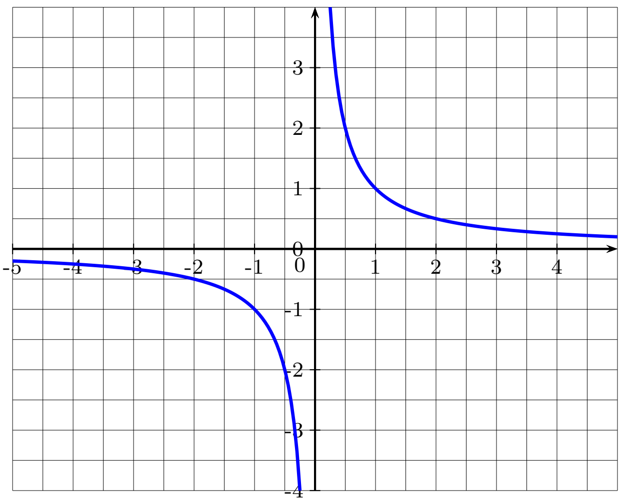
A connaître

Elles s'appellent fonctions de référence.... et ce n'est pas pour rien ! Il est essentiel de les connaître parfaitement..... courbe, tableaux de variations, signe ..... de savoir les utiliser. A partir de ces fonctions, on peut "fabriquer" d'autres fonctions qui vont avoir des caractéristiques communes. Par exemple, la fonction $x \longmapsto 2x^2 + 6$ est une fonction qui est construite à partir de la fonction carré. Cela signifie, par exemple, qu'à partir de la fonction carré, on peut en déduire le sens de variation de cette fonction.

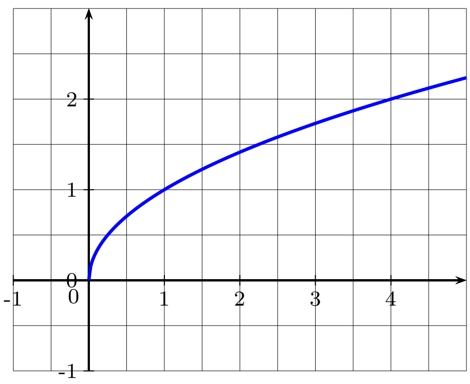
Fonction carré



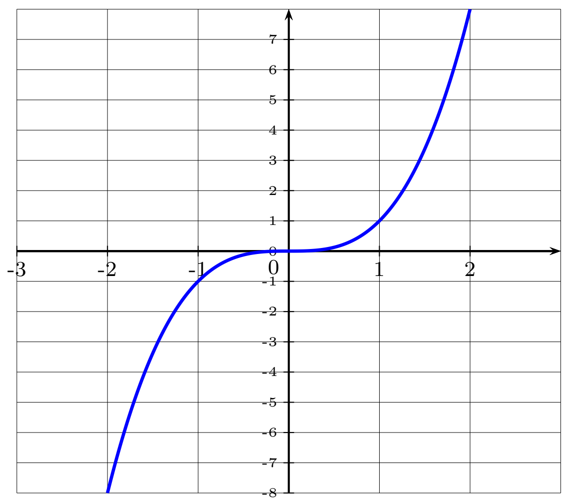
Fonction inverse



Fonction racine carrée

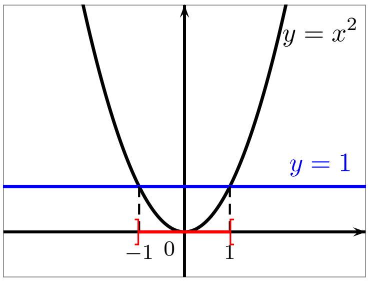


Fonction cube

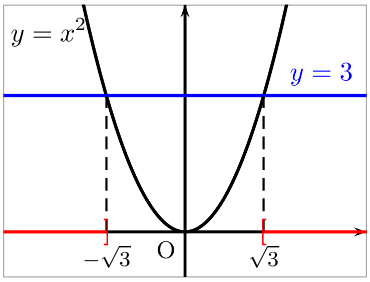


Exercice 2

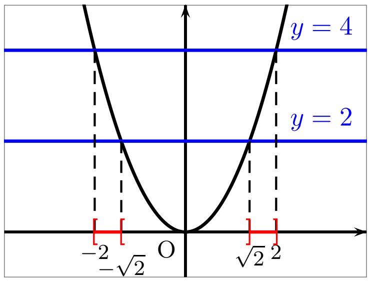
Résolutions graphiques des inéquations.



$x^2 < 1$



$x^2 \geqslant 3$

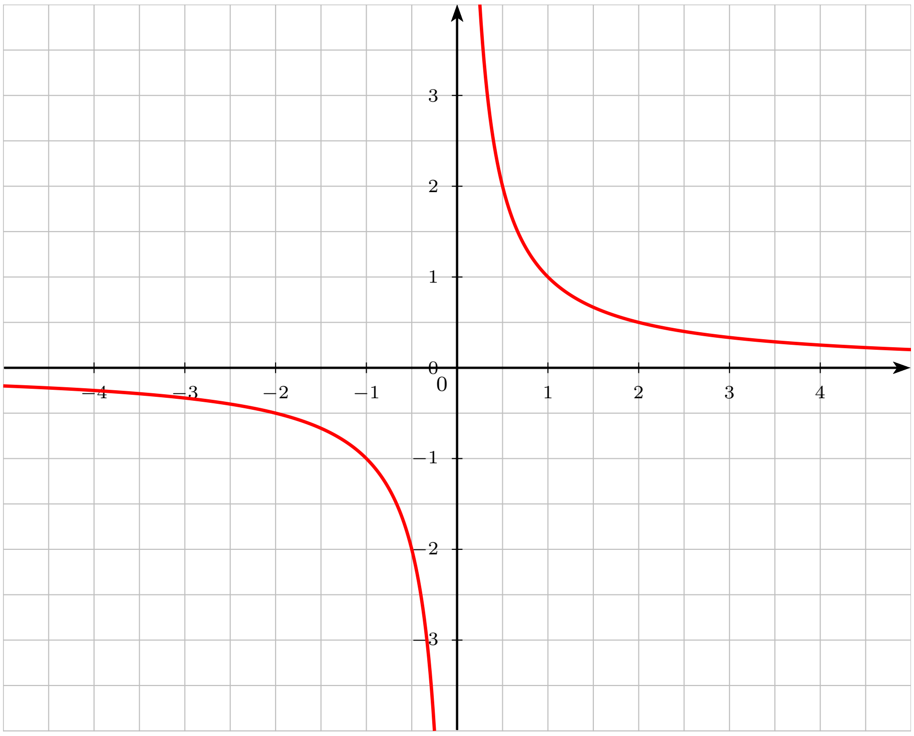


$2 < x^2 \leqslant 4$

$\mathscr{S}_1 =]-1\ ;\ 1[$ $\mathscr{S}_2 =]-\infty\ ;\ -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}\ ;\ +\infty[$ $\mathscr{S}_3 = [-2\ ;\ -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}\ ;\ 2]$

Exercice 3

1. La courbe représentative de la fonction inverse est une hyperbole.



2. La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

$f(-5) = \dfrac{1}{-5} = -0,2$. Ainsi, l'image de l'abscisse est l'ordonnée du point. On en déduit que la point A est bien sur la représentation graphique.

Point sur une courbe

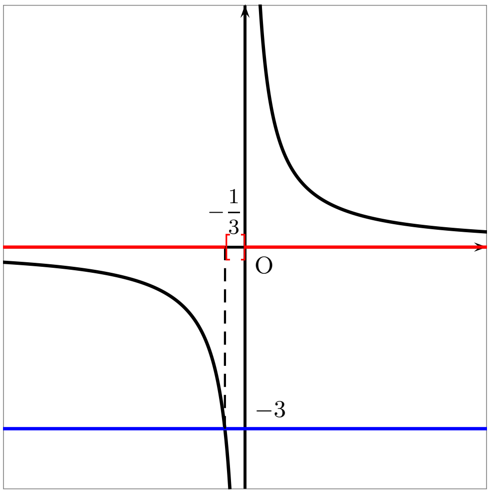
A quelles conditions un point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ est-il sur la courbe $\mathscr{C}_f$? Deux choses : x doit être dans l'ensemble de définition et y doit être l'image de x par f. On doit donc avoir l'égalité $y = f(x)$.

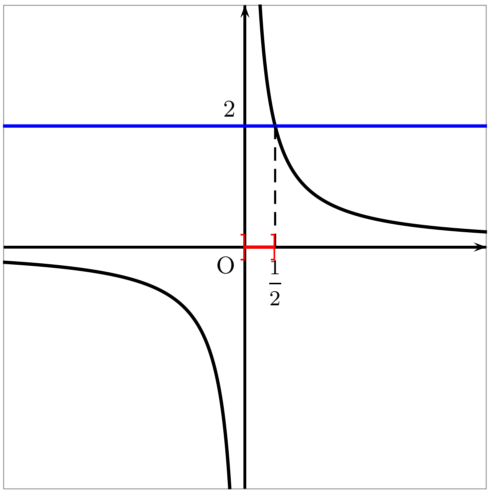
Remarque

0 est le seul réel qui n'a pas d'inverse. En effet, si 0 avait un inverse, alors il existerait un réel a tel que $a \times 0 = 1$. Or $a \times 0 = 0$, on obtient donc l'égalité $0 = 1$. Ce qui est faux (vous le savez !). Donc 0 n'a pas d'inverse. Ce raisonnement porte le nom de raisonnement par l'absurde.

3. L'ensemble de définition de la fonction inverse est $\mathbb{R}^*$.

4. Résolutions des inéquations :





$$\frac{1}{x} > -3$$
$$\mathscr{S} = \left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{3}\right[\cup]0\ ;\ +\infty[$$

Attention !
0 est une valeur interdite. Il doit être exclu de l'ensemble des solutions.

$$\frac{1}{x} \geqslant 2$$
$$\mathscr{S} = \left]0\ ;\ \frac{1}{2}\right]$$

Exercice 4

1. La fonction h étant la fonction racine carré,

$$\left.\begin{array}{l} h(8)+h(32)=\sqrt{8}+\sqrt{32}=2\sqrt{2}+4\sqrt{2}=6\sqrt{2} \\ h(72)=\sqrt{72}=\sqrt{36\times 2}=6\sqrt{2} \end{array}\right\} \text{donc } h(8)+h(32)=h(72)$$

Calcul
Pour simplifier une racine carrée, on fait apparaître un carré parfait (4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; ....)
Et utiliser si a et b sont positifs : $\sqrt{a^2\times b}=a\sqrt{b}$.
$\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=\sqrt{2^2\times 2}=2\sqrt{2}$.
$\sqrt{32}=\sqrt{16\times 2}=\sqrt{4^2\times 2}=4\sqrt{2}$.
$\sqrt{72}=\sqrt{36\times 2}=\sqrt{6^2\times 2}=6\sqrt{2}$

2. a. $\sqrt{81}=9$.

b. $\sqrt{(-7)^2}=|(-7)|=7$

Petit rappel
On a vu que pour tout réel x, $\sqrt{x^2}=|x|$.
N'oubliez pas que la racine carrée d'un nombre est un nombre positif.

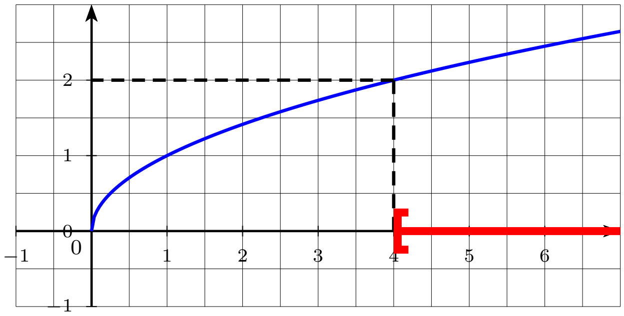
c. Solution de l'équation $\sqrt{x}=2$.

On cherche le nombre dont la racine carrée vaut 2. C'est bien sûr 4.
L'équation $\sqrt{x}=2$ a pour unique solution 4.

Equation $\sqrt{x}=a$
Si $a \geqslant 0$, cette équation a une unique solution : a^2.
Si a est négatif, cette équation n'a pas de solution.

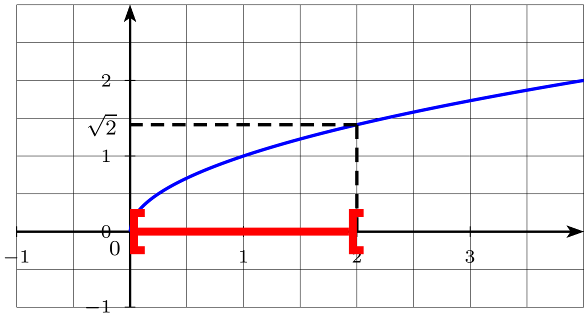
d. $f(100)=10\sqrt{100}=10\times 10=100$.

e. Avec la représentation graphique :



L'inéquation $\sqrt{x} \geqslant 2$ a pour solution $[4\ ;\ +\infty[$.

f. Avec la représentation graphique :



L'inéquation $\sqrt{x} < \sqrt{2}$ a pour solution $[0\ ;\ 2[$.

Attention !

L'ensemble de définition de la fonction racine carrée est $[0\ ;\ +\infty[$, donc pas de solutions négatives !

g. L'ordonnée du point de la courbe de la fonction racine carrée est $\sqrt{10}$.

h. C'est faux ! Si a est strictement négatif, cette équation n'a pas de solution.

3. a. $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$.

b. $-2^2 = -2 \times 2 \times 2 = -8$

Bizarre ?

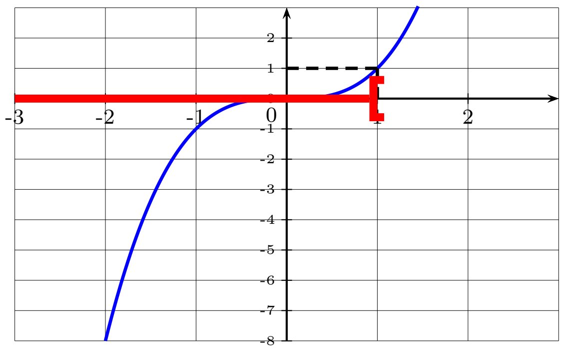
On obtient le même résultat mais les calculs sont différents. Dans l'un c'est (-2) qui est au cube, dans l'autre, c'est 2.

c. On cherche le nombre dont le cube est -1. Eh bien c'est -1. L'équation $x^3 = -1$ a pour solution -1.

Equation $x^3 = a$

Cette équation a une solution unique quelque soit la valeur de a.

d. Avec la représentation graphique :



L'inéquation $x^3 < 1$ a pour solution $]-\infty\ ;\ 1[$.

e. $(\sqrt{3})^3 = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.