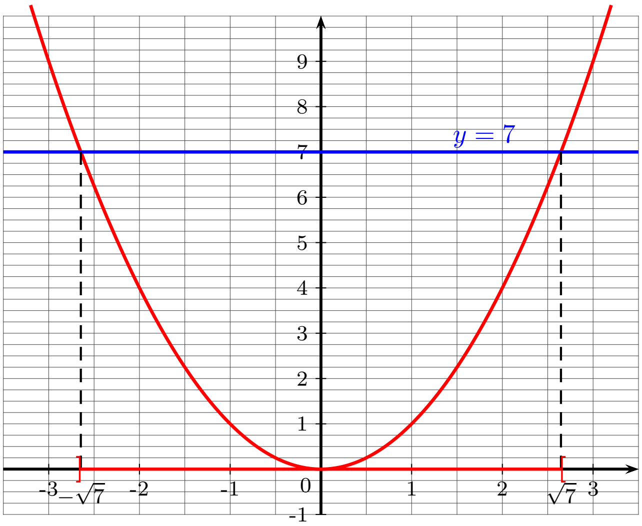
MATHEMATIQUES

Généralités sur les fonctions. Fonctions de référence : entraînement 3 (corrigé)

Exercice 1

1. Représentation graphique de la fonction carré.



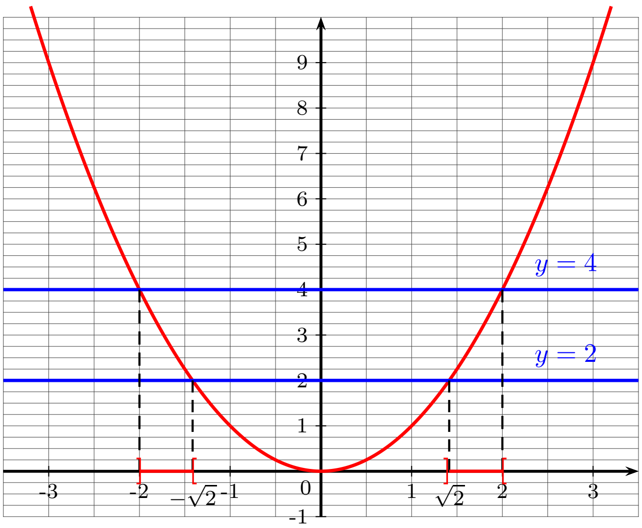
2. Utilisation de la représentation graphique.

a. Inéquation $x^2 < 7$.
On trace la droite d'équation $y = 7$ et on lit les solutions sur l'axe des abscisses (voir graphique ci-dessus).

Explications
Les solutions sont les abscisses des points de la courbe situés strictement en dessous de la droite d'équation $y = 7$.

b. Ensemble des réels qui vérifient $2 < x^2 < 4$.
On trace les droites d'équation $y = 2$ et $y = 4$ et on lit les solutions sur l'axe des abscisses (voir graphique ci-dessous).

Explications
Les solutions sont les abscisses des points de la courbe situés entre les droites d'équation $y = 2$ et $y = 4$.



$\mathscr{S} =]-2\ ;\ -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}\ ;\ 2[$.

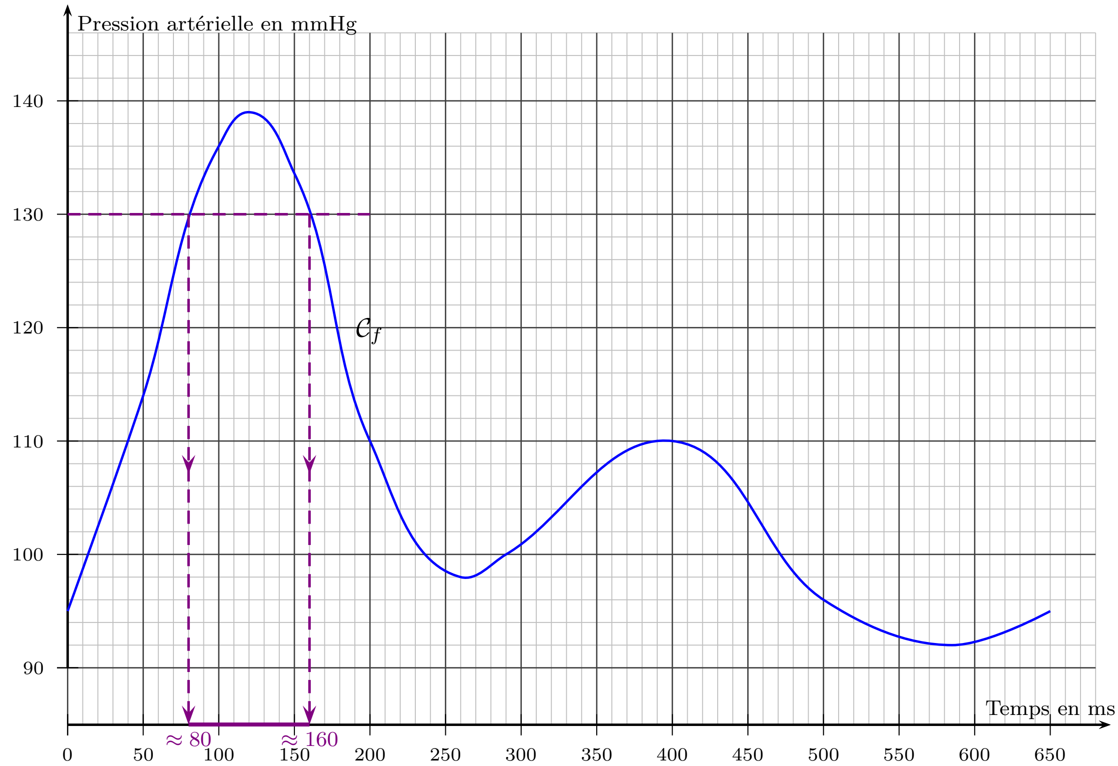
c. L'affirmation de Nabolos est fausse.

En effet $(-5)^2 = 25 \geqslant 9$ et pourtant -5 n'est pas supérieur à 3.

Contre exemple

Pour prouver qu'une affirmation est fausse, il suffit d'exhiber une contre exemple. -5 vérifie bien l'hypothèse $x^2 \geqslant 9$, mais ne vérifie pas la conclusion.
Vous pouvez vous aider de la courbe en traçant la droite d'équation $y = 9$. Regardez les points de la courbe qui sont au-dessus de cette droite sur le côté gauche.

Exercice 2



1. La pression artérielle est supérieure ou égale à 130 mmHg sur l'intervalle [80 ; 160].
2. **a.** La valeur systolique mesurée, c'est-à-dire la valeur maximale de la pression artérielle est d'environ 139.
   b. La valeur diastolique mesurée est 92.
   c. Un patient est en hypertension artérielle lorsque la pression systolique est supérieure ou égale à 140 mmHg ou que la pression diastolique est supérieure ou égale à 92 mmHg.
   Ce patient est en hypertension puisque sur l'intervalle la pression diastolique est supérieure à 90 mmHg.

3. D'après cet examen, nous pouvons estimer que le patient ne souffre pas de tachycardie.
   Un battement dure 0,650 s, par conséquent dans 60 s il y aura $\dfrac{60}{0{,}650}$ battements soit environ 92 battements par minute. Il y en a donc strictement moins de 100.

Exercice 3

1. On cherche une température en °C. On calcule l'image de 32 par f.

   $f(32) = \frac{5}{9} \times 32 - \frac{160}{9} = \frac{160}{9} - \frac{160}{9} = 0.$

   On en déduit que 32°F=0°C.
   Le point de solidification de l'eau est bien 32°F.

Bien comprendre

Prenez la temps de bien comprendre cette formule :

$$\underbrace{f(t)}_{\text{Temp. en °C}} = \frac{5}{9}\underbrace{t}_{\text{Temp. en °F}} - \frac{160}{9}$$

2. On cherche encore une température en °C. On calcule l'image de 212 par f :

   $f(212) = \frac{5}{9} \times 212 - \frac{160}{9} = \frac{1060}{9} - \frac{160}{9} = \frac{900}{9} = 100.$
   Ainsi, l'eau bout à 212 °F.

3. On cherche une température en °F. On calcule l'antécédent de 37 par f :

$$\begin{aligned}
\frac{5}{9}t - \frac{160}{9} &= 37 \\
\frac{5}{9}t &= 37 + \frac{160}{9} \\
\frac{5}{9}t &= \frac{333}{9} + \frac{160}{9} \\
\frac{5}{9}t &= \frac{493}{9} \\
t &= \frac{493}{9} \div \frac{5}{9} \\
t &= \frac{493}{9} \times \frac{9}{5} && \text{Diviser revient à multiplier par l'inverse.} \\
t &= \frac{4437}{45} \\
t &= 98,6
\end{aligned}$$

   Conclusion : 37 °C = 98,6°F.

4. Résolution de l'équation :

$$\begin{aligned}
\frac{5}{9}t - \frac{160}{9} &= t \\
\frac{5}{9}t - t &= \frac{160}{9} \\
\frac{5}{9}t - \frac{9}{9}t &= \frac{160}{9} \\
\frac{-4}{9}t &= \frac{160}{9} \\
t &= \frac{160}{9} \div \frac{-4}{9} \\
t &= \frac{160}{9} \times \frac{9}{-4} && \text{Diviser revient à multiplier par l'inverse.} \\
t &= \frac{1440}{-36} \\
t &= -40
\end{aligned}$$

   Conclusion : −40 °C=−40 °F.

Exercice 4

- Expression de $f(x)$:

$$f(x) = \underbrace{2^2}_{\substack{\text{Aire du}\\\text{carré}\\\text{AEFG}}} + \underbrace{6 \times x}_{\substack{\text{Aire du}\\\text{rectangle}\\\text{EMND}}} = 4 + 6x$$

- Expression de $g(x)$:

$$g(x) = \underbrace{6^2}_{\substack{\text{Aire du}\\\text{carré}\\\text{BCDE}}} - \underbrace{6 \times x}_{\substack{\text{Aire du}\\\text{rectangle}\\\text{EMND}}} = 36 - 6x$$

- Calcul de x pour que les surfaces aient la même aire :

$$\begin{array}{rcl}
f(x) & = & g(x) \\
4 + 6x & = & 36 - 6x \\
6x + 6x & = & 36 - 4 \\
12x & = & 32 \\
x & = & \dfrac{32}{12} \\
x & = & \dfrac{8}{3}
\end{array}$$

Les aires sont égales pur $x = \dfrac{8}{3}$ cm, soit environ 2,7 cm.

Exercice 5

1. $f(10) = \dfrac{75 \times 10}{10 + 2} = \dfrac{750}{12} = 62,5.$
$62,5$ % des personnes résidant dans cette ville connaissent la marque après 10 semaines de campagne publicitaire.

2. $f(12) = \dfrac{75 \times 12}{12 + 2} \simeq 64,3 < 70.$
Au bout de 12 semaines, l'objectif des 70 % n'est toujours pas atteint.

3. a. 25% sont atteints pour $x = 1$ et 50 % pour $x = 4$. On en déduit que 3 semaines ont été nécessaires pour que le pourcentage d'habitants ayant pris connaissance de la marque passe de 25 à 50 %.

b.

x	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f(x)$	53,6	56,3	58,3	60	61,4	62,5	63,5	64,3	65	65,6	66,2

Calculatrice

On sélectionne le menu TABLE. On entre la fonction Fonct Table :Y= Y1≡$\frac{75X}{X+2}$. Pour obtenir le "X", on utilise la touche X,θ,T. N'oubliez pas d'appuyer sur EXE pour sélectionner la fonction (un petit rectangle noir doit apparaître sur le signe =).

Si en entrant dans le menu `Table`, vous obtenez une fenêtre du type Fonct Table :Param Xt2: Yt2:, vous devez la changer en sélectionnant TYPE avec F3. Choisissez Y= avec F1.
Ensuite, SET par F5.

On entre les valeurs de début et de fin du tableau ainsi que le pas : Start:5 End :15 Step :1.

Puis EXE et enfin TABL par F6.
Le tableau de valeurs apparaît :

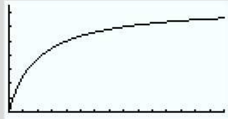
X	Y1
5	53.571
6	56.25
7	58.333
8	60

Vous pouvez obtenir une image particulière en entrant directement la valeur de X que vous souhaitez dans le tableau et en appuyant ensuite sur EXE.

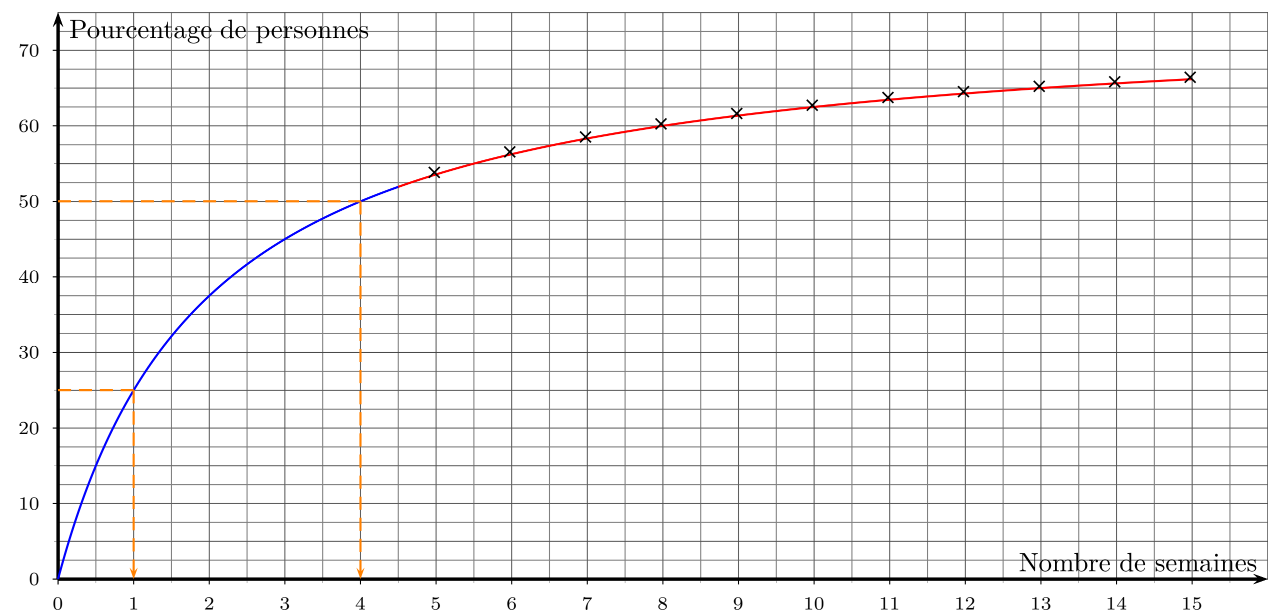
Pour obtenir la représentation graphique de f, on entre dans le menu GRAPH. La fonction doit déjà être écrite.

Ensuite, SHIFT et F3 (V-Window) afin de paramétrer la fenêtre d'affichage (`V-Window`) que l'on souhaite.
Pour cette représentation : $X_{Min} = 0$, $X_{Max} = 15$, $X_{Scale} = 1$ $Y_{Min} = 0$, $Y_{Max} = 75$ et $Y_{Scale} = 10$.

Puis, en appuyant sur EXE, et en sélectionnant DRAW par F6, on obtient :



c. Voici la représentation graphique complétée :



4. Après 15 semaines de campagne, 66,2 % des personnes dans la ville ont pris connaissance de la marque. L'objectif était de 70 %. Il n'est donc pas atteint au bout de 15 semaines. L'agence demande donc un délai supplémentaire.

5. En utilisant la calculatrice, on obtient un nouveau tableau de valeurs qui permet de répondre à la question :

X	Y1
26	69.642
27	69.827
28	70
29	70.161

C'est donc à partir de la 28ème semaine qu'il y aura 70 % des personnes qui auront pris connaissances de cette marque. Il faudra donc 10 semaines supplémentaires de campagne.

Exercice 6

1. L'aire du trapèze est donnée par la différence de l'aire du carré $ABCD$ avec celle du triangle AMD.

L'aire du carré est 36 unités d'aire.
L'aire du triangle AMD est $\dfrac{x \times 6}{2} = 3x$.

L'aire du trapèze est donc : $36 - 3x$.

Aire d'un trapèze et d'un triangle

L'aire d'un trapèze de base B et b et de hauteur h est donnée par $\dfrac{(b+B) \times h}{2}$. On pouvait utiliser cette formule.... mais pour cela, il faut la connaître ! En revanche, celle d'un triangle est à connaître : $\dfrac{\text{Base} \times \text{hauteur}}{2}$.

2. Résolution de l'inéquation.

$$\begin{aligned}
f(x) &\leqslant 24 \\
36 - 3x &\leqslant 24 \\
-3x &\leqslant 24 - 36 \\
-3x &\leqslant -12 \\
x &\geqslant \frac{-12}{-3} \\
x &\geqslant 4
\end{aligned}$$

Si $x \geqslant 4$, alors $f(x) \leqslant 24$.

Remarque

x est un nombre inférieur ou égal à 6.