Lycée Louise Michel (Gisors)

Seconde

MATHEMATIQUES

Nombres et calculs numériques : entraînement savoir-faire (corrigé)

Exercice 1

1. Deux entiers consécutifs quelconques s'écrivent n et $n+1$.
Leur somme est $n+(n+1)=2n+1$. On reconnaît l'écriture d'un nombre impair.
Ainsi, quand on ajoute deux entiers consécutifs, on obtient un entier impair.

2. Deux entiers consécutifs quelconques s'écrivent n et $n+1$.

- Soit n est pair et alors il existe un entier p tel que $n=2p$.
Dans ce cas $n+1=2p+1$.
Le produit de ces deux entiers consécutifs s'écrit : $2p\times(2p+1)$ soit $\underbrace{2\times p(2p+1)}_{\text{Forme } 2\times N}$. On reconnaît l'écriture d'un entier pair.

Type de raisonnement

Le raisonnement utilisé ici est appelé raisonnement par disjonction de cas. Celui-ci consiste à démontrer une propriété en distinguant toutes les hypothèses possibles. Par exemple ici, n peut être pair ou impair. Il n'y a pas d'autres possibilités.

- Soit n est impair et alors il existe un entier p tel que $n=2p+1$.
Dans ce cas, $n+1=2p+1+1=2p+2$.

Le produit de ces deux entiers consécutifs s'écrit : $(2p+1)\times(2p+2)$.

Or, $2p+2=2\times(p+1)$ et donc : $(2p+1)\times(2p+2)=\underbrace{2\times(2p+1)(p+1)}_{\text{Forme } 2\times N}$.

On reconnaît l'écriture d'un entier pair.

Dans tous les cas, on trouve un entier pair.

Nombre pair

Un entier est pair s'il existe un entier p tel que $n=2\times p$.

3. a est un multiple de 18 s'il existe un entier k tel que $a=18\times k$.

Or, $18\times k=3\times 6\times k=\underbrace{3\times(6k)}_{\text{Forme } 3\times k'}$.

Donc : $a=3k'$. Cette dernière écriture montre que a est un multiple de 3.

De la même façon, $18\times k=6\times 3\times k=\underbrace{6\times(3k)}_{\text{Forme } 6\times k''}$.

Donc : $a=6k''$. Cette dernière écriture montre que a est un multiple de 6.

Multiple

On dit que a est un multiple de b s'il existe un entier k tel que $a=b\times k$.

La réciproque de « si un entier est un multiple de 18 alors il est aussi multiple de 3 et de 6 » est « si un entier est un multiple de 3 et de 6, alors il est multiple de 18 ».

Cette réciproque est fausse. En effet, 12 (par exemple) est bien un multiple de 3 et de 6 mais ce n'est pas un multiple de 18.

Réciproque - Contre-exemple

La réciproque d'une propriété s'obtient en inversant hypothèses et conclusion.
L'hypothèse « un entier est un multiple de 18 » devient la conclusion et la conclusion « il est aussi multiple de 3 et de 6 »devient l'hypothèse.
Pour montre qu'une affirmation est fausse, il suffit d'exhiber un contre-exemple, c'est-à-dire ici un nombre qui vérifient l'hypothèse « un entier est un multiple de 3 et de 6 »mais qui ne vérifie pas la conclusion « il est multiple de 18 ».

Exercice 2

1. Les multiples de 57 sont les nombres qui s'écrivent $57k$ avec k entier.
On cherche les valeurs de k telles que $1451 \leqslant 57k \leqslant 1845$.
En divisant par 57, on obtient : $\dfrac{1451}{57} \leqslant k \leqslant \dfrac{1845}{57}$.
$\dfrac{1451}{57} \simeq 25,5$ et $\dfrac{1845}{57} \simeq 32,4$.

Comme k est entier, on en déduit que les valeurs de k sont comprises entre 26 et 32.

Remarque
On a $\dfrac{1451}{57} \leqslant 26 \leqslant k \leqslant 32 \leqslant \dfrac{1845}{57}$.

Il y a donc 7 valeurs de k possibles : 26, 27, ..., 32 et donc 7 multiples de 57 compris entre 1451 et 1845.

Remarque
Par exemple, le plus petit multiple de 57 compris entre 1451 et 1845 est $26 \times 57 = 1482$.

2. On a $15 = 3 \times 5$ et $24 = 2^3 \times 3$.
Le plus petit commun multiple est donc : $2^3 \times 3 \times 5 = 120$.

Méthode
On prends tous les facteurs qui figurent dans l'un au moins de ces produits.

Une autre méthode consiste à écrire les premiers multiples de chacun des nombres :

- Les multiples de 15 sont : 15 ; 30 ; 45 ; 60 ; 75 ; 90 ; 105 ; **120** ; 135 ; .....

- Les multiples de 24 sont : 24 ; 48 ; 72 ; 96 ; **120** ; 144 ; .....

On retrouve le plus petit commun multiple : 120.

3. $72 = 1 \times 72$.
$72 = 2 \times 36$
$72 = 3 \times 24$
$72 = 4 \times 18$
$72 = 6 \times 12$
$72 = 8 \times 9$
Les diviseurs de 72 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; **12** ; 18 ; 24 ; 36 ; 72.

$84 = 1 \times 84$
$84 = 2 \times 42$
$84 = 3 \times 28$
$84 = 4 \times 21$
$84 = 6 \times 14$
$84 = 7 \times 12$

Les diviseurs de 72 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; **12** ; 14 ; 21 ; 28 ; 42 ; 84.

Le plus grand diviseur commun de 72 et 84 est donc 12.

Exercice 3

Pour décomposer en produits de facteurs premiers

Pour décomposer un nombre en produit de facteurs premiers, on cherche ses diviseurs premiers dans l'ordre croissant. Pour cela, on utilise les critères de divisibilité (il faut connaître, au moins, les plus utilisés) :
- Un nombre est divisible par 2 lorsqu'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- Un nombre est divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est un multiple de 3 ;
- Un nombre est divisible par 5 lorsqu'il se termine par 0 ou 5 ;
- Un nombre est divisible par 9 lorsque la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

1. Pour déterminer les diviseurs premiers de 588, on le décompose en produits de facteurs premiers :

$$\begin{array}{r|ll} 588 & 2 & (588 \div 2 = 294) \\ 294 & 2 & (294 \div 2 = 147) \\ 147 & 3 & (147 \div 3 = 49) \\ 49 & 7 & (49 \div 7 = 7) \\ 7 & 7 & (7 \div 7 = 1) \\ 1 & & \end{array}$$

Le nombre 588 peut se décomposer sous la forme $588 = 2^2 \times 3 \times 7^2$.

Les diviseurs premiers de 588 sont donc : 2 ; 3 et 7.

2. **a.** Décomposition en facteurs premiers de 27 000 000.

$$\begin{array}{r|l} 27\,000\,000 & 2 \\ 13\,500\,000 & 2 \\ 6\,750\,000 & 2 \\ 3\,375\,000 & 2 \\ 1\,687\,500 & 2 \\ 843\,750 & 2 \\ 421\,875 & 3 \\ 140\,625 & 3 \\ 46\,875 & 3 \\ 15\,625 & 5 \\ 3\,125 & 5 \\ 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Le nombre 27000000 peut se décomposer sous la forme $27000000 = 2^6 \times 3^3 \times 5^6$.

Plus astucieusement

$$\begin{aligned} 27\,000\,000 &= 27 \times 1\,000\,000 \\ &= 3^3 \times 10^6 \\ &= 3^3 \times (2 \times 5)^6 \\ &= 3^3 \times 2^6 \times 5^6 \\ &= 2^6 \times 3^3 \times 5^6 \end{aligned}$$

b. Les diviseurs premiers de 27 000 000 sont 2 ; 3 et 5.

3. Les premiers nombres impairs premiers sont 3 ; 5 et 7, donc le plus petit entier impair admettant trois diviseurs premiers différents est $3 \times 5 \times 7 = 105$.

Exercice 4

1. On décompose les nombres 882 et 1134 en facteurs premiers :

$$\begin{array}{r|ll} 882 & 2 & (882 \div 2 = 441) \\ 441 & 3 & (441 \div 3 = 147) \\ 147 & 3 & (147 \div 3 = 49) \\ 49 & 7 & (49 \div 7 = 7) \\ 7 & 7 & (7 \div 7 = 1) \\ 1 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll} 1134 & 2 & (1134 \div 2 = 567) \\ 567 & 3 & (567 \div 3 = 189) \\ 189 & 3 & (189 \div 3 = 63) \\ 63 & 3 & (63 \div 3 = 21) \\ 21 & 3 & (21 \div 3 = 7) \\ 7 & 7 & (7 \div 3 = 1) \\ 1 & & \end{array}$$

Ainsi :

$882 = 2 \times 3^2 \times 7^2$ et $1134 = 2 \times 3^4 \times 7$.

$$\frac{882}{1134} = \frac{2 \times 3^2 \times 7^2}{2 \times 3^4 \times 7} = \frac{7}{3^2} = \frac{7}{9}$$

2. Décomposition de 120 en facteurs premiers :

180	2	$(180 \div 2 = 60)$
90	2	$(90 \div 2 = 30)$
45	3	$(45 \div 3 = 15)$
15	3	$(15 \div 3 = 5)$
5	5	$(5 \div 5 = 1)$
1		

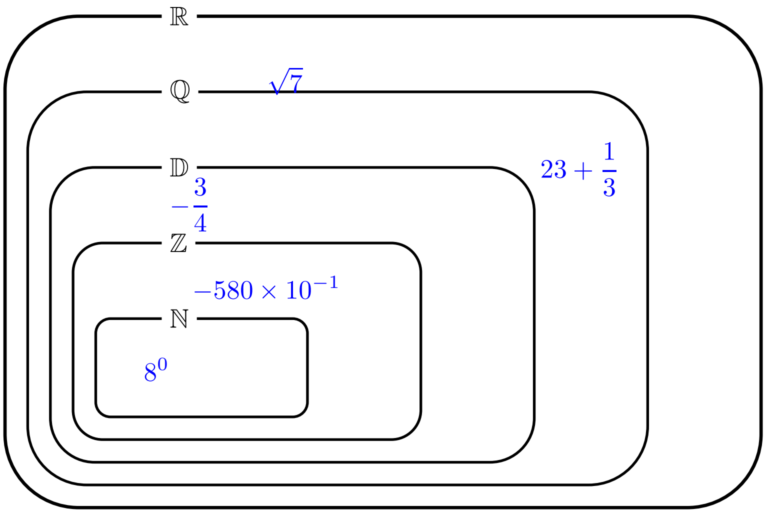
Ainsi, $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$.

Par conséquent, $\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5} = 2 \times 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$.

Rappel

Pour $a \geqslant 0$, on a : $\sqrt{a^2} = a$.

Exercice 5



Quelques explications

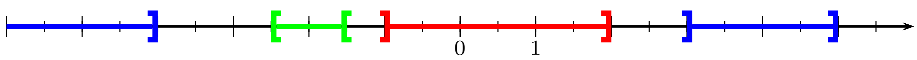
- $8^0 = 1$.
- $-580 \times 10^{-1} = -58$.
- $-\frac{3}{4} = -0,75$.
- $2 + \frac{1}{3} \simeq 2,3333...$

Exercice 6

1. $I =]-1\ ;\ 2]$.

2. $J =]-\infty\ ;\ -4] \cup]3\ ;\ 5]$.

3. Représentation de K :



L'idée

Sans calculatrice, déterminer un encadrement du nombre proposé qui permette de montrer qu'il est dans I, J ou K.
Par exemple, on encadre 10 par deux carrés parfaits ($9 = 3^2$ et $16 = 4^2$), ce qui permet d'obtenir que $\sqrt{10} \in J$.

4. • Comme $9 < 10 < 16$, on a : $3 < \sqrt{10} < 4$, d'où $\sqrt{10} \in J$.

Encadrer

L'idée est d'écrire la fraction comme la somme d'un entier (le plus grand possible) et d'une fraction dont le numérateur est plus petit que le dénominateur (et donc plus petite que 1), ce qui permet d'obtenir un encadrement à l'unité.

• Comme $\frac{11}{6} = \frac{6}{6} + \frac{5}{6} = 1 + \frac{5}{6}$ et que $\frac{5}{6} < 1$,

on en déduit que $1 < \frac{11}{6} < 2$ et par par conséquent que $\frac{11}{6} \in I$.

- Comme $16 < 17 < 25$, on a $4 < \sqrt{17} < 5$.
Donc $-4 > -\sqrt{17} > -5$ et finalement $-3 > 1-\sqrt{17} > -4$.

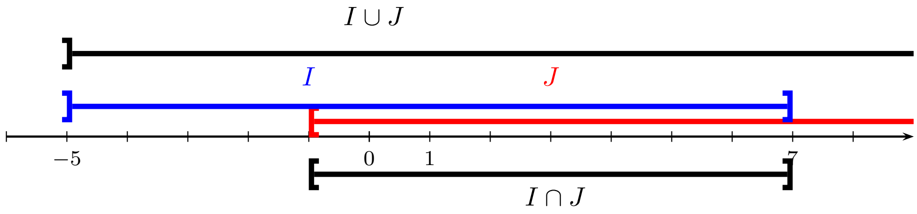
Ainsi, $1-\sqrt{17}$ n'est ni dans I, ni dans J ni dans K.

N'oubliez pas !

Quand on multiplie par un nombre négatif (ici -1) on change le sens de l'inégalité.

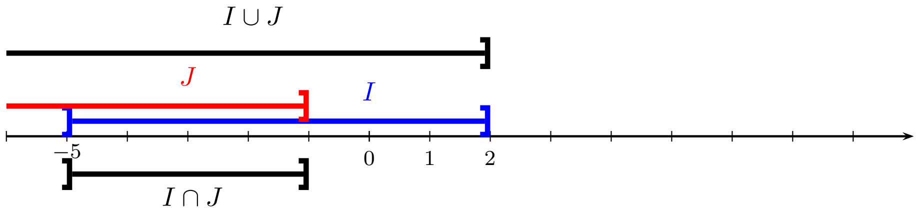
Exercice 7

a. On représente graphiquement les intervalles $I = [-1\ ;\ +\infty[$ et $J =]-5\ ;\ 7]$.



$I \cap J = [-1\ ;\ 7]$ et $I \cup J =]-5\ ;\ +\infty[$.

b. On représente graphiquement les intervalles $I = [-5\ ;\ 2]$ et $J =]-\infty\ ;\ -1]$.



$I \cap J =]-5\ ;\ -1]$ et $I \cup J =]-\infty\ ;\ 2]$.

Exercice 8

1.
- $4,569 < 4,57 < 4,571$
- $0,059 < 0,06 < 0,061$
- $6,999 < 7 < 7,001$
- $2,099 < 2,1 < 2,101$
- $4,458 < 4,4589 < 4,459$

Deux choses

- Les nombres doivent avoir trois chiffres derrière la virgule ;
- Ils doivent être les plus proches possibles.

Sans ces deux conditions, il y aurait une infinité de solutions.

2.
- Pour $\sqrt{157}$:
La calculatrice donne $\sqrt{157} \simeq 12,52996409$.
Ainsi, $\sqrt{157}$ est supérieur à 12,529 et inférieur à 12,530.

$$12,529 < \sqrt{157} < 12,530$$

Méthode

Pour obtenir un encadrement d'amplitude 10^{-2}, obtenir $n+1$ décimales avec la calculatrice.

- Pour $\dfrac{17}{13}$:
La calculatrice donne $\dfrac{17}{13} \simeq 1,307692308$.
Ainsi, $\dfrac{17}{13}$ est supérieur à 1,307 et inférieur à 1,308.

$$1,307 < \frac{17}{13} < 1,308$$

- Pour $1+\sqrt{427}$:
La calculatrice donne $1+\sqrt{427} \simeq 20,66397832$.
Ainsi, $1+\sqrt{427}$ est supérieur à 20,663 et inférieur à 20,664.

$$20,663 < 1+\sqrt{427} < 20,664$$

Exercice 9

1. $2^{-1} = \frac{1}{2} = 0,5$.

Réponse : ☒ égal à 0,5.

2. $5,72 \times 10^{-4}$ est une écriture scientifique et aussi un nombre positif.

On a $5,72 \times 10^{-4} = 0,000572$.

Réponse :
☒ une écriture sientifique ☒ Un nombre positif

Rappels

- D'une façon générale, l'écriture scientifique, c'est l'écriture sous la forme d'un nombre décimal dont la partie entière est comprise entre 1 et 9, multiplié par une puissance de 10. C'est bien le cas ici puisque $1 \leqslant 5,72 \leqslant 9$ et 10^{-4} est bien une puissance de 10.
- $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000} = 0,0001$.

3. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{2^3}$.
$\frac{1}{2^3} = 2^{-3}$.

Réponse : ☒ 2^{-3} ☒ $\frac{1}{2^3}$.

4. $\frac{2^{-4}}{2^9} = 2^{-4-9} = 2^{-13}$.

Réponse :
☒ 2^{-13}

Formule

$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$.

5. $5^6 \times 5^4 = 5^{6+4} = 5^{10}$

Formule

$a^n \times b^n = (a \times b)^n$.

Exercice 10

1. Le carré de $\sqrt{7}$ est $(\sqrt{7})^2 = 7$. Le double du carré de $\sqrt{7}$ est $2 \times 7 = 14$.
Réponse : ☒ 14.

2. Le carré de $\sqrt{2}$ est $(\sqrt{2})^2 = 2 = \sqrt{4}$.
Réponse : ☒ $\sqrt{4}$.

3. • $\left(\frac{\sqrt{5}}{7}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}}{7} \times \frac{\sqrt{5}}{7} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{7 \times 7} = \frac{5}{49}$

ou

• $\left(\frac{\sqrt{5}}{7}\right)^2 = \frac{(\sqrt{5})^2}{7^2} = \frac{5}{49}$

Réponse ☒ $\frac{5}{49}$.

Evidemment

On utilise $A^2 = A \times A$

Méthode

On utilise $\left(\frac{A}{B}\right)^2 = \frac{A^2}{B^2}$.

4. $\sqrt{32} + \sqrt{2} = \sqrt{16 \times 2} + \sqrt{2} = \sqrt{4^2 \times 2} + \sqrt{2} = \sqrt{4^2} \times \sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
De plus, $5\sqrt{2} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{50}$

Réponses ☒ $5\sqrt{2}$ et ☒ $\sqrt{50}$

Carré parfait

On remarque que :
$32 = 16 \times 2 = 4^2 \times 2$.

5. Par définition, $\sqrt{2}$ est l'unique nombre positif dont le carré vaut 2. C'est donc également un nombre dont le carré vaut 2.
Réponses : ☒ L'unique nombre dont le carré vaut 2 et ☒ Un nombre dont le carré vaut 2.