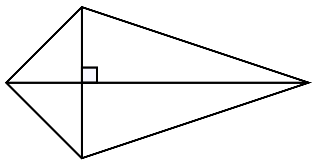
MATHEMATIQUES

Repérage et problèmes de géométrie : entraînement 1 (corrigé)

Exercice 1

1. **FAUX** : il faudrait en plus qu'elles aient le même milieu.



Méthode

Pour prouver qu'une affirmation est fausse, il suffit d'exhiber un contre exemple. Ici, le quadrilatère présenté a bien ses diagonales perpendiculaires, mais ce n'est pas un losange.

Rappel

La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points à égale distance des extrémités du segment. Vous pouvez également faire un dessin pour répondre à cette question.

2. **FAUX** : il appartient la médiatrice de ce segment.
Par exemple, le sommet principal d'un triangle isocèle.

3. **FAUX**

Le point K est le centre du cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si K est le milieu de $[AB]$.

On cherche les coordonnées du milieu de $[AB]$. On note J ce point :

$$x_J = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-9+4}{2} = -2,5.$$

$$y_J = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6+3}{2} = 4,5.$$

Conseil

Notez le milieu de $[AB]$ par une autre lettre que K. En effet, on ne sait pas si K est le milieu, c'est justement ce que l'on veut vérifier.

Le centre du cercle a pour coordonnées $(-2,5\ ;\ 4,5)$.
Les points J et K n'ont pas les mêmes coordonnées. On en déduit que le point K n'est pas le centre du cercle de diamètre $[AB]$.

4. **VRAI**

Le point H appartient à la médiatrice de $[JK]$ si et seulement si $HJ = HK$.

$$\begin{aligned} HJ &= \sqrt{(x_J - x_H)^2 + (y_J - y_H)^2} \\ &= \sqrt{(4-3)^2 + (0-5)^2} \\ &= \sqrt{1^2 + (-5)^2} \\ &= \sqrt{1+25} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

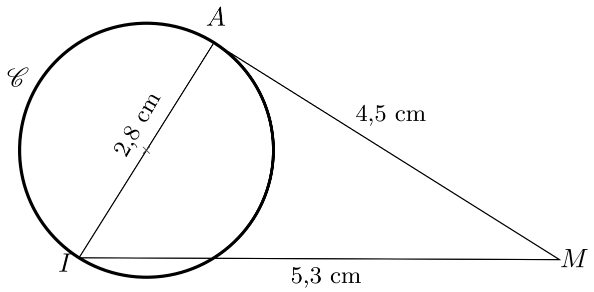
Conseil

N'hésitez pas à faire un petit dessin pour voir la situation.

$$\begin{aligned} HK &= \sqrt{(x_K - x_H)^2 + (y_K - y_H)^2} \\ &= \sqrt{(-2-3)^2 + (4-5)^2} \\ &= \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{25+1} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

Par conséquent, $HJ = HK$ et donc le point H est bien sur la médiatrice de $[JK]$.

Exercice 2



Construction

- Tracez le segment $[MI]$.
- Construire le point A en utilisant un compas.

Sur la figure, on conjecture que la droite (AM) semble perpendiculaire à la droite (AI).
Il faut donc vérifier que le triangle MAI est rectangle en A.

Rappel

Pour démontrer qu'une droite d est tangente à un cercle de centre O en l'un de ses points A, on démontre que d et (OA) sont perpendiculaires.

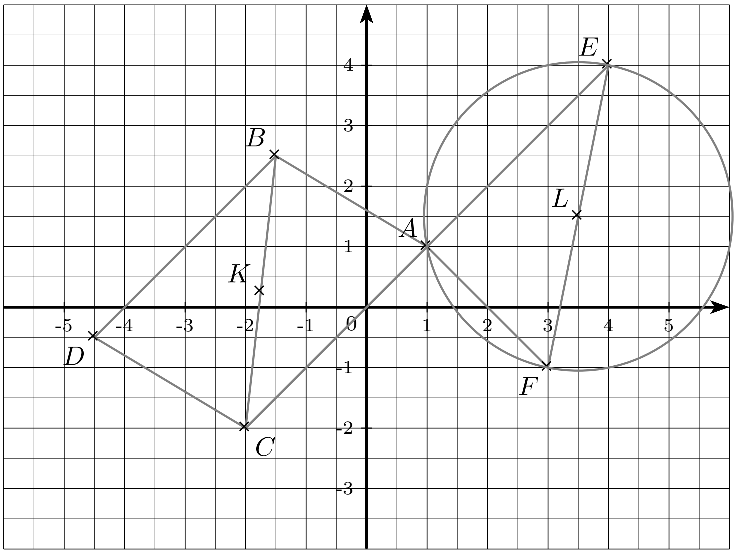
Conseil

En écrivant les longueurs sur la figure, vous devez vous rendre compte que c'est la réciproque du théorème de Pythagore qu'il faudra utiliser.

$IM^2 = 5,3^2 = 28,09$
$AI^2 + AM^2 = 2,8^2 + 4,5^2 = 28,09$.
Ainsi, $AI^2 + AM^2 = IM^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle MAI est rectangle en A.
Par conséquent, la droite (AM) est perpendiculaire en A à la droite (AI), ce qui permet de dire que la droite (AM) est tangente en A au cercle $\mathscr{C}$.

Exercice 3



1. $A(1\ ;\ 1)$, $B(-1,5\ ;\ 2,5)$ et $C(-2\ ;\ -2)$.

2. $x_K = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{-1,5 + (-2)}{2} = -1,75.$

$y_K = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{2,5 + (-2)}{2} = 0,25.$

Le point K a pour coordonnées $(-1,75\ ;\ 0,25)$.

3. $ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.
Les diagonales de $ABDC$ sont $[BC]$ et $[AD]$.

K étant le milieu de $[BC]$. Il faut donc déterminer les coordonnées du point D de façon que K soit aussi le milieu de $[AD]$.

Attention !!
Placez le point D sur la figure en faisant bien attention à l'ordre des lettres. C'est $AB\boldsymbol{DC}$ et pas $ABCD$.

En notant x_K et y_K les coordonnées du point K, on écrit les égalités correspondantes :

$$\begin{cases} x_K = \dfrac{x_A + x_D}{2} \\ y_K = \dfrac{y_A + y_D}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1,75 = \dfrac{1 + x_D}{2} \\ 0,25 = \dfrac{1 + y_D}{2} \end{cases}$$ On remplace avec les valeurs connues

$$\begin{cases} 2 \times (-1,75) = 1 + x_D \\ 2 \times 0,25 = 1 + y_D \end{cases}$$ On multiplie par 2 chaque membre (ou on fait un produit en croix, au choix...)

$$\begin{cases} -3,5 = 1 + x_D \\ 0,5 = 1 + y_D \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3,5 - 1 = \cancel{1} + x_D - \cancel{1} & \text{On retranche 1 dans chaque membre} \\ 0,5 - 1 = \cancel{1} + y_D - \cancel{1} & \text{On retranche 1 dans chaque membre} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4,5 = x_D \\ -0,5 = y_D \end{cases}$$

Les coordonnées du point D sont $(-4,5\ ;\ -0,5)$.

Pensez-y !
Votre résultat doit être cohérent avec votre graphique.

4. Le point E est le symétrique du point C par rapport au point A signifie que A est le milieu de $[EC]$.

En notant x_E et y_E les coordonnées du point E, on obtient :

> **Méthode**
> Posez-vous les bonnes questions :
> • Qu'est-ce que signifie E est le symétrique du point C par rapport au point A.
> • Comment puis-je le traduire ?
> • Un dessin peut vous aider.

$$\begin{cases} x_A = \dfrac{x_E + x_C}{2} \\ y_A = \dfrac{y_E + y_C}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{x_E + (-2)}{2} \\ 1 = \dfrac{x_E + (-2)}{2} \end{cases} \quad \text{On remplace avec les valeurs connues}$$

$$\begin{cases} 2 \times 1 = x_E - 2 \\ 2 \times 1 = y_E - 2 \end{cases} \quad \text{On multiplie par 2 chaque membre (ou on fait un produit en croix, au choix...)}$$

$$\begin{cases} 2 = x_E - 2 \\ 2 = y_E - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + 2 = x_E - \cancel{2} + \cancel{2} & \text{On ajoute 2 dans chaque membre} \\ 2 + 2 = x_E - \cancel{2} + \cancel{2} & \text{On ajoute 2 dans chaque membre} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 = x_E \\ 4 = y_E \end{cases}$$

Le point E a pour coordonnées $(4\ ;\ 4)$.

5. a.

$$\begin{aligned} AF &= \sqrt{(x_F - x_A)^2 + (y_F - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(3-1)^2 + (-1-1)^2} \\ &= \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{4+4} \\ &= \sqrt{8} \end{aligned}$$

On a donc $AE = \sqrt{18}$, $EF = \sqrt{26}$ et $AF = \sqrt{8}$.

La plus grande longueur étant EF (si le triangle est rectangle, il ne peut l'être qu'en A) :

$$\left.\begin{aligned} AE^2 + AF^2 = 18 + 8 = 26 \\ EF^2 = 26 \end{aligned}\right\} \quad \text{Ainsi } AE^2 + AF^2 = EF^2$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle AEF est rectangle en A.

b. Le centre de son cerclce circonscrit se situe au milieu de l'hypoténuse, soit au milieu de $[EF]$.
En notant L ce point, on obtient :

$$x_L = \frac{x_E + x_F}{2} = \frac{4+3}{2} = 3,5.$$

$$y_L = \frac{y_E + y_F}{2} = \frac{4+(-1)}{2} = 1,5.$$

Le centre du cercle circonscrit du triangle AEF a pour coordonnées $(3,5\ ;\ 1,5)$.

> **Pensez-y !**
> Le centre du cercle circonscrit d'un triangle est le point de concours des médiatrices de ses côtés.
> Donc pas évident à déterminer.
> L'énoncé vous guide en vous demandant la nature du triangle AEF. Et si ce triangle était rectangle ? Ce serait quand même plus simple pour déterminer le centre de son cercle circonscrit, non ?

Son rayon r est donné par $\dfrac{EF}{2}$ soit $r = \dfrac{\sqrt{26}}{2}$.