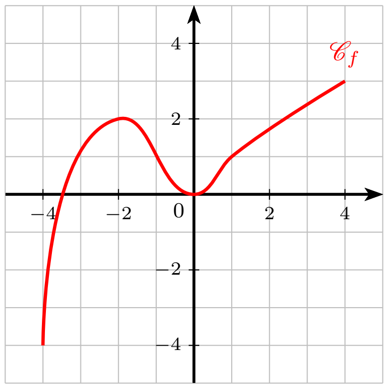
MATHEMATIQUES
Variations et extremums : entraînement savoir-faire 1 (corrigé)

Exercice 1

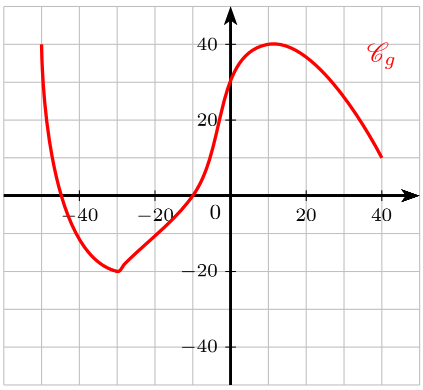
Explications

Pour dresser un tableau de variations, sur la première ligne du tableau, on inscrit les valeurs de x (qu'on lit sur l'axe des abscisses) et sur la deuxième ligne, on indique avec des flèches comment évoluent les images. Aux extrémités des flèches, on inscrit les images lues sur le graphique.



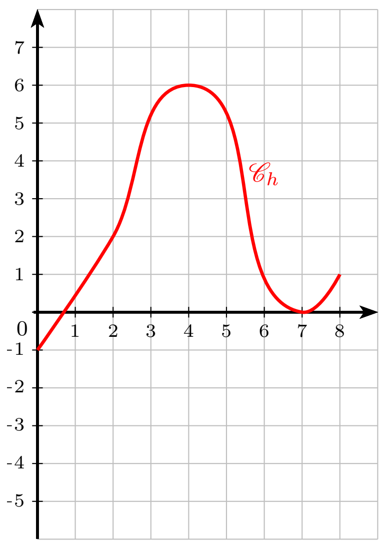
x	-4		-2		0		4
$f(x)$	-4	↗	2	↘	0	↗	3

Le maximum de la fonction f est 3. Il est atteint en $x = 4$.
Le minimum de la fonction f est -4. Il est atteint en $x = -4$.



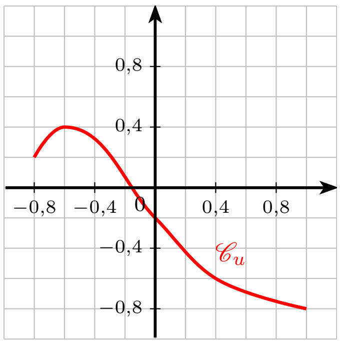
x	-50		-30		10		40
$g(x)$	40	↘	-20	↗	40	↘	10

Le maximum de la fonction g est 40. Il est atteint en $x = -50$ et $x = 10$.
Le minimum de la fonction g est -20. Il est atteint en $x = -30$.



x	0		4		7		8
$h(x)$	-1	↗	6	↘	0	↗	1

Le maximum de la fonction h est 6. Il est atteint en $x = 4$.
Le minimum de la fonction h est -1. Il est atteint en $x = 0$.



x	$-0{,}8$		$-0{,}6$		1
$u(x)$	$0{,}2$	↗	$0{,}4$	↘	$-0{,}8$

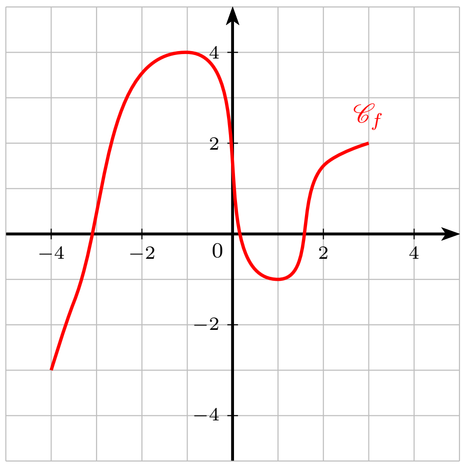
Le maximum de la fonction u est 0,4. Il est atteint en $x = -0,6$.
Le minimum de la fonction u est $-0,8$. Il est atteint en $x = 1$.

Exercice 2

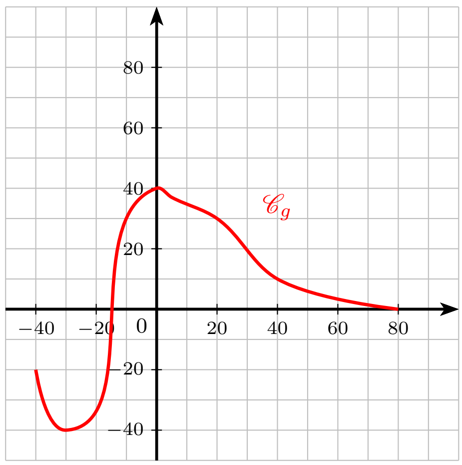
Explications

Pour tracer une courbe à partir d'un tableau de variations, suivez les indications données dans le tableau. Placez les points donnés dans le tableau et reliez-les. Attention, il y a plusieurs (et même une infinité) de courbe possibles à partir d'un tableau de variations. Dons si la votre n'est pas exactement comme celle que j'ai tracée, pas de panique !

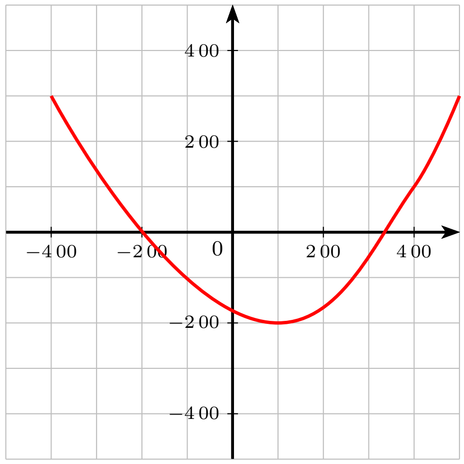
x	-4		-1		1		3
$f(x)$	-3	↗	4	↘	-1	↗	2



x	-40		-30		0		80
$g(x)$	-20	↘	-40	↗	40	↘	0



x	-400		100		$+\infty$
$h(x)$	300	$\searrow$	-200	$\nearrow$	



Explications

x varie de -400 à $+\infty$. De ce fait on trace la courbe en allant "au bout" du repère "à droite".

Exercice 3

Voici le tableau de variation d'une fonction f définie sur $[-10\ ;\ 5]$:

x	-10		-7		2		5
$f(x)$	-5	$\searrow$	-9	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

1. Donner le minimum et le maximum de la fonction f et préciser en quelles valeurs ils sont atteints.

Le maximum de f sur $[-10\ ;\ 5]$ est 1. Il est atteint en $x = 2$.
Le minimum de f sur $[-10\ ;\ 5]$ est -9. Il est atteint en $x = -7$.

Vocabulaire

Le minimum et le maximum d'une fonction sont les extrema de la fonction.

2. a. En utilisant ce tableau de variations, donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$: Cette équation a deux solutions x_1 et x_2.

x	-10		-7		x_1		2		x_2		5
$f(x)$	-5	$\searrow$	-9	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

b. En utilisant ce tableau de variations, donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$: Cette équation a une unique solution : 2.

Remarque

Dans ce cas particulier, on peut donner la valeur exacte de la solution, du fait que l'image de 2 est 1 par f d'après ce tableau.

c. En utilisant ce tableau de variations, donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$: Cette équation n'a pas de solution.

Justification

Le maximum de f étant 1, l'équation $f(x) = 4$ n'a pas de solution.

3. On considère l'équation $f(x) = -1$.
Cette équation a deux solutions x_1 et x_2. Donner la valeur exacte de x_2 et proposer un encadrement le plus précis possible de x_1.

x	-10		-7	x_1	2		$x_2 = 5$
$f(x)$	-5	$\searrow$	-9	$\nearrow$ -1	1	$\searrow$	-1

La valeur de x_2 est 5 car 5 est un antécédent de -1 par f.
L'encadrement de x_1 est : $-7 < x_1 < 2$.

Encadrement
Encadrer un nombre, c'est donner une valeur plus petite et une valeur plus grande que ce nombre.

4. En utilisant ce tableau de variations, comparer $f(0)$ et $f(1)$, puis $f(3)$ et $f(4)$.

• $0 < 1$ et f est strictement croissante sur $[-7\ ;\ 2]$ (qui contient les valeurs 0 et 1).
Ainsi, $f(0) < f(1)$.

Fonction croissante
Une fonction croissante conserve l'ordre, c'est-à-dire que les nombres (ici 0 et 1) sont rangés dans le même ordre que leurs images (ici $f(0)$ et $f(1)$).

• $3 < 4$ et f est strictement décroissante sur $[2\ ;\ 5]$ (qui contient les valeurs 3 et 4).
Ainsi, $f(3) > f(4)$.

Fonction décroissante
Une fonction décroissante change l'ordre, c'est-à-dire que les nombres (ici 3 et 4) sont rangés dans l' ordre inverse de leurs images (ici $f(3)$ et $f(4)$).

Voilà ce que cela donne dans le tableau :

x	-10		-7	0	1	2	3	4	$x_2 = 5$
$f(x)$	-5	$\searrow$	-9	$f(0)$	$f(1)$	1	$f(3)$	$f(4)$	-1

5. Si $x \in [-10\ ;\ -7]$, dans quel intervalle se situe $f(x)$? $-9 \leqslant f(x) \leqslant -5$, soit $f(x) \in [-9\ ;\ -5]$.

Explications
x varie entre -10 et -7, donc $f(x)$ varie entre le minimum de f et le maximum de f sur $[-10\ ;\ -7]$ soit entre -9 et -5.

6. Si $x \in [-7\ ;\ 5]$, dans quel intervalle se situe $f(x)$? $-9 \leqslant f(x) \leqslant 1$, soit $f(x) \in [-9\ ;\ 1]$..

Explications
x varie entre -7 et 5, donc $f(x)$ varie entre le minimum de f et le maximum de f sur $[-7\ ;\ 5]$ soit entre -9 et 1.