MATHEMATIQUES
Les vecteurs (entraînement 3 (corrigé))

Exercice 1

1. $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-5 \\ y+3 \end{pmatrix}$

2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -9 \\ 9 \end{pmatrix}$ et donc $3\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -27 \\ 27 \end{pmatrix}$

3. Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées :
$\begin{cases} x-5=-27 \\ y+3=27 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x=-22 \\ y=24 \end{cases}$.
Le point M a pour coordonnées : $(-22\ ;\ 24)$.

4. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires. On en déduit que les points A, B et M sont alignés.

Exercice 2

1. On a grâce à la figure : $C(0\ ;\ 13)$, $E(13\ ;\ 7)$ et $F(25\ ;\ 0)$.

- Le vecteur $\overrightarrow{CE}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 13-0 \\ 7-13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -6 \end{pmatrix}$

- Le vecteur $\overrightarrow{CF}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 25-0 \\ 0-13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -13 \end{pmatrix}$

Conjecture

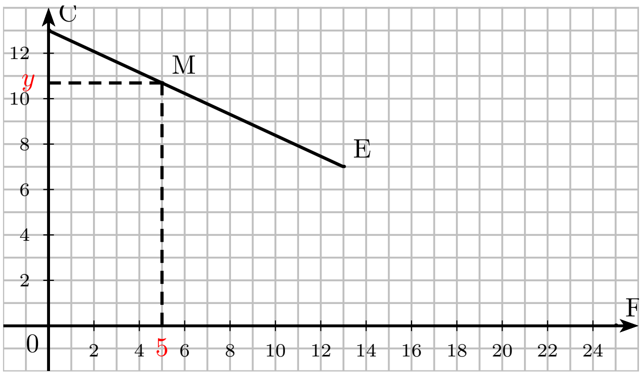
En traçant la droite (CF) on voit que le point E n'est pas sur la droite. Cela n'est pas une preuve. C'est seulement une conjecture. La preuve vient par le calcul ici.

Explications

L'idée est de tester la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$. S'ils sont colinéaires alors les points sont alignés et s'ils ne le sont pas les points ne sont pas alignés. C'est aussi simple que cela !

On calcule le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$: $-13\times 13-(-6)\times 25=-19\neq 0$.
On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ ne sont pas colinéaires et donc que les points C, E et F ne sont pas alignés.

2. a. On place le point M sur la figure :



b. • Le vecteur $\overrightarrow{CM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 5-0 \\ y-13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ y-13 \end{pmatrix}$

• Le vecteur $\overrightarrow{CE}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 13-0 \\ 7-13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -6 \end{pmatrix}$

Comme les points C, M et E sont alignés, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires et donc que leurs coordonnées sont proportionnelles.
Le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CM}$ est donc nul. Ainsi : $13 \times (y-13) - 5 \times (-6) = 0$.

$$\begin{array}{rcl} 13 \times (y-13) - 5 \times (-6) & = & 0 \\ 13y - 169 + 30 & = & 0 \\ 13y - 139 & = & 0 \\ 13y & = & 139 \\ y & = & \dfrac{139}{13} \end{array}$$

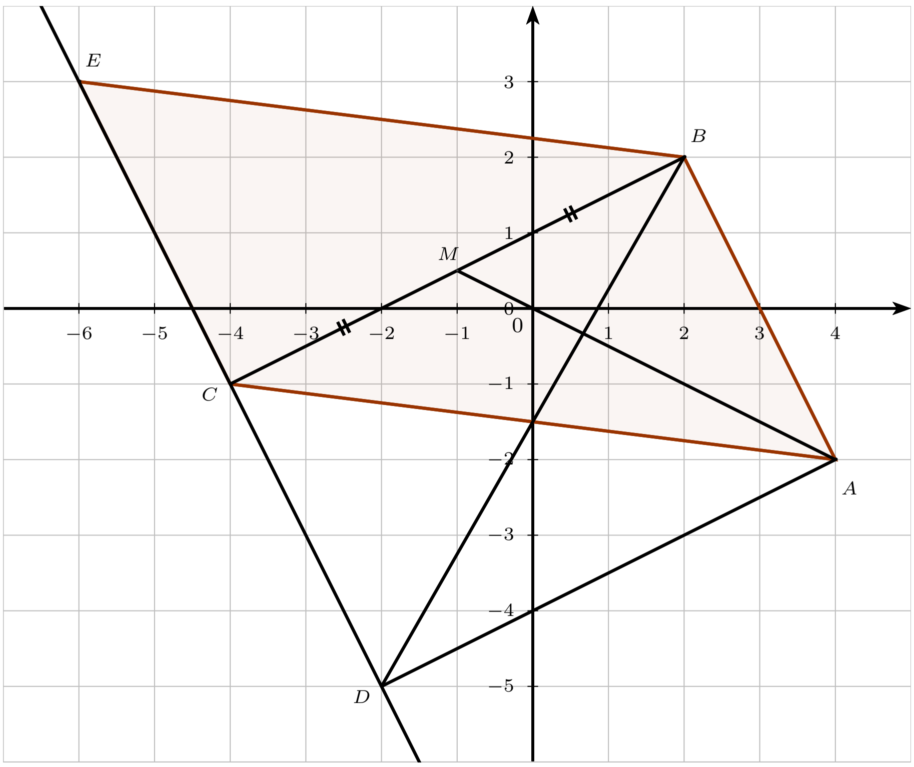
La valeur exacte de y est $\dfrac{139}{13}$.

Conseil

Calculez la valeur approchée de ce quotient pour vérifier que le résultat soit cohérent avec la figure.

Exercice 3

1. a. Figure complète :



$ABEC$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$.

En notant $(x\ ;\ y)$ les coordonnées du point E :

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ 2-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$
- Le vecteur $\overrightarrow{CE}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x - x_C \\ y - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+4 \\ y+1 \end{pmatrix}$.

L'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$ se traduit par : $\begin{cases} x+4=-2 \\ y+1=4 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x=-6 \\ y=3 \end{cases}$

Les coordonnées du point E sont $(-6\ ;\ 3)$.

Rappel

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées.

b. Le point E a pour coordonnées $(-6\ ;\ 3)$.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$
- Le vecteur $\overrightarrow{DE}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -6-(-2) \\ 3-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

Conseil

Vous pouvez lire les coordonnées des vecteurs sur la figure afin de vérifier vos calculs. Une erreur de calcul est si vite arrivée...

On remarque que $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{AB}$

Remarques pas inutile

• Inutile de faire les produits en croix ici. L'égalité est très simple à trouver, non ?
• Comme (AB) est aussi parallèle à (CE), on peut en déduire que les points C, E et D sont alignés.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires et donc que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

2. a. Les coordonnées du point M sont données par :

$x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{2+(-4)}{2} = -1$ et $y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{2+(-1)}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Le point M a pour coordonnées $\left(-1\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$.

b.
- Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Conseil

Choisissez des vecteurs dont les coordonnées sont simples à calculer comme ceux que j'ai choisi.
En effet, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont les coordonnées du point M.

On voit qu'en multipliant par -4 les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$, on obtient les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA}$.
Donc : $\overrightarrow{OA} = -4 \times \overrightarrow{OM}$.

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires et donc les points O, A et M sont alignés.

3. a. $AC = \sqrt{(-4-4)^2 + (-1-(-2))^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}$.

$BD = \sqrt{(-2-2)^2 + (-5-2)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$.

b. Il faut expliquer pourquoi $ABCD$ est un rectangle.

- On commence par montrer que c'est un parallélogramme.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$. De même les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DC}$ sont $\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$.

On en déduit que $ABCD$ est un parallélogramme.

- On explique pourquoi c'est un rectangle.

Les diagonales de ce parallélogramme sont de même longueur, on en déduit que $ABCD$ est un rectangle.

Exercice 4

1. $L(2\ ;\ 0)$ et $K\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

2. a. Le vecteur $\overrightarrow{LK}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_K - x_L\\y_K - y_L\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}-2\\\frac{1}{2}-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

b. Le vecteur $\overrightarrow{LM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_M - x_L\\y_M - y_L\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0-2\\y-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\y\end{pmatrix}$.

3. Comme les points L, K et M sont alignés, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{LM}$ sont colinéaires.
Le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{LM}$ et $\overrightarrow{LK}$ est nul.
On obtient : $-\frac{3}{2} \times y - \frac{1}{2} \times (-2) = 0$.

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{2} \times y - \frac{1}{2} \times (-2) &= 0\\
-\frac{3}{2}y + 1 &= 0\\
-\frac{3}{2}y &= -1\\
y &= -1 \div \left(-\frac{3}{2}\right)\\
y &= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Les coordonnées du point M sont $\left(0\ ;\ \frac{2}{3}\right)$.

Pensez-y !

Sur le graphique on voit que le nombre y est compris entre 0 et 1 et même qu'il est plus proche de 1 que de 0.
Ce résultat est donc cohérent.