PROBABILITÉS

10

Loi binomiale

Les savoir-faire du chapitre

- **100.** Modéliser une situation et calculer des probabilités dans le cadre d'une succession d'épreuves indépendantes.
- **101.** Calculer des probabilités du type $p(X = k)$, $p(X > k)$ ou $p(X < k)$ pour une v.a. X suivant une loi binomiale.
- **102.** Utiliser la loi binomiale pour résoudre un problème de seuil.

Le problème de Nabolos

Lorsque les éléphants sautent en parachute au-dessus de la savane, ils chaussent des raquettes pour ne pas s'enliser.

Il y a deux types de raquettes pour pachydermes : certains utilisent quatre raquettes à petit tamis, une à chaque patte, et les autres deux raquettes à grand tamis, pour les pattes postérieures. Les fixations sont les mêmes pour les deux types de raquettes.

La probabilité pour qu'une raquette se détache avant le contact avec le sol est égale à 0,3.

Sachant qu'un éléphant s'enlise s'il a perdu plus de la moitié de son équipement, comparer les probabilités de s'enliser avec chacun des types de raquettes.

S'entraîner

100 **Modéliser une situation et calculer des probabilités dans le cadre d'une succession d'épreuves indépendantes.**

Une urne contient 3 boules rouges, 7 boules vertes et 1 boule jaune. On note :

- R l'événement « on obtient une boule rouge » ;
- V l'événement « on obtient une boule verte » ;
- J l'événement « on obtient une boule jaune ».

1) On tire successivement et sans remise deux boules de cette urne.

a) Représenter cette situation par un arbre pondéré.

b) Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge au second tirage.

2) On garde dans l'urne que les 3 boules rouges et les 7 boules vertes.

On tire successivement et avec remise trois boules de l'urne.

a) Représenter cette situation par un arbre pondéré.

b) Donner l'ensemble des issues sous la forme d'un produit cartésien.

c) Calculer la probabilité de tirer une boule rouge aux deux premiers tirages, puis une boule verte au dernier tirage.

101 **Calculer des probabilités du type $p(X = k)$, $p(X > k)$ ou $p(X < k)$ pour une v.a. X suivant une loi binomiale.**

1) X suit $\mathscr{B}(6\,;\,0{,}4)$, déterminer, à l'aide de la calculatrice, les probabilités suivantes :

a) $P(X = 2)$ **c)** $P(X \leqslant 4)$ **e)** $P(X > 3)$

b) $P(X = 0)$ **d)** $P(X \leqslant 6)$ **f)** $P(X \geqslant 5)$

2) Y suit une loi binomiale avec $P(Y \leqslant 15) = 0,65$ et $P(Y \leqslant 19) = 0,875$. Déterminer :

a) $P(Y > 15)$ **b)** $P(16 \leqslant Y \leqslant 19)$

3) Lamine joue aux échecs contre un ordinateur et la probabilité qu'il gagne une partie est 0,65.
Il décide de jouer sept parties contre l'ordinateur.
On suppose que le résultat de chaque partie est indépendant des autres.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de parties qu'il gagne contre l'ordinateur sur les sept.

a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres n et p.

b) Quelle est la probabilité qu'il gagne exactement trois parties ? Arrondir à 10^{-4} près.

c) Quelle est la probabilité qu'il gagne plus de la moitié des parties ? Arrondir à 10^{-4} près.

d) Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins deux parties ? Arrondir à 10^{-4} près.

102 **Utiliser la loi binomiale pour résoudre un problème de seuil.**

Au cours d'une soirée, un restaurant accueille 45 convives.
Pour un convive quelconque, il est établi par le restaurateur que la probabilité qu'il prenne un café à la fin du repas est exactement de 0,8.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de cafés effectivement commandés à l'issue de la soirée. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 45$ et $p = 0,8$.

1) **a)** Utiliser la calculatrice pour obtenir les valeurs de k et les probabilités $P(X = k)$ correspondantes pour $0 \leqslant k \leqslant 45$.

b) Donner les valeurs de k pour lesquelles $P(X = k) \geqslant 0,1$.

2) Utiliser la calculatrice pour obtenir les probabilités cumulées croissantes $P(X \leqslant k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant 45$.

3) **a)** Déterminer le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) \geqslant 0,9$. Interpréter ce résultat dans le contexte.

b) Déterminer le plus grand nombre entier b tel que $P(X \leqslant b) \leqslant 0,1$.

c) Déterminer un intervalle $[c; d]$ (c et d entiers) d'amplitude minimale tel que $P(c \leqslant X \leqslant d) \geqslant 0,95$.